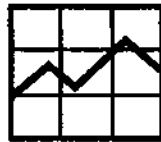


Эдгар Э. Петерс

**ФРАКТАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ
ФИНАНСОВЫХ
РЫНКОВ**

**Применение теории Хаоса в
инвестициях и экономике**



"Интернет-Трейдинг"

Москва

2004

Э. Петерс

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004 – 304 с.

ISBN 5-902360-03-X

Настоящая книга посвящена изложению гипотезы фрактального рынка, как альтернативе гипотезы эффективного рынка. Фракталы, как следствие геометрии Демиурга присутствуют повсеместно в нашем мире и играют существенную роль, в том числе, и в структуре финансовых рынков, которые локально случайны, но глобально детерминированы, по мнению автора. В книге будут рассмотрены методы фрактального анализа рынков акций, облигаций и валют, методы различения независимого процесса, нелинейного стохастического процесса и нелинейного детерминированного процесса и исследовано влияние этих различий на пользовательские инвестиционные стратегии и способности моделирования. Такие стратегии и способности моделирования тесно связаны с типом активов и инвестиционным горизонтом пользователя.

Для риск-менеджеров, финансистов, инвестиционных стратегов, технических аналитиков рынка, а также индивидуальных инвесторов и валютных спекулянтов самостоятельно выходящих на финансовые рынки мира, в том числе, и на рынок FOREX и рынки России.

ISBN 5-902360-03-X

Originally published by Jhon Wiley&Sons, ltd, Copyright © 2003, All rights reserved.

Права получены по соглашению с Jhon Wiley&Sons, ltd при содействии Агентства А. Коржаневского

© ООО "Интернет-трейдинг", 2004 г. (перевод)

Fractal Market Analysis

Applying Chaos Theory to Investment and Economics

Edgar E. Peters



Jhon Wiley & Sons, Inc

New York • Chichester • Brisbane • Toronto • Singapore

Введение

В 1991 г. я закончил написание книги, озаглавленной *«Хаос и порядок на рынках капитала»*. Она была опубликована осенью того года (Peters, 1991a). Моя цель состояла в том, чтобы написать концептуальное введение для инвестиционного сообщества к теории хаоса и фрактальной статистике. Я также хотел представить некоторое предварительное свидетельство того, что вопреки принятой теории рынки не достаточно хорошо описываются моделью случайных блужданий, и широко представленная гипотеза эффективного рынка (Efficient Market Hypothesis – EMH) не достаточно хорошо подтверждается эмпирическими данными.

В общем, моя книга получила очень положительные отзывы. Многие читатели ее одобрили, хотя некоторые выразили свое неодобрение и задали подробные вопросы. Вопросы разделились на две категории: (1) техническую и (2) концептуальную. В технической категории оказались вопросы с просьбой сообщить больше информации об анализе. Моя книга не была предназначена быть учебником и я пропустил многие технические подробности, задействованные в анализе. Такой подход улучшил удобочитаемость книги, но заставил многих читателей задаться вопросом: «Что же делать дальше?»

Во второй категории были вопросы, связанные с концептуальными проблемами. Если EMH имеет недостатки, то как можно ее исправить? Или, скорее, какова ее жизнеспособная замена? Как теория хаоса и фракталы сочетаются с торговыми стратегиями и с дихотомией технического и фундаментального анализов? Могут ли эти, казалось бы, несопоставимые теории быть объединены? Может ли традиционная теория стать нелинейной?

В этой книге я рассматриваю обе категории вопросов. Хотя книга отличается от предыдущей, тем не менее, она отражает многие схожие черты. Фрактальный анализ рынка – это попытка обобщить Теорию рынка капитала (Capital Market Theory – CMT) и объяснить разнородность инвестиционного сообщества. Одна из неудач традиционной теории заключается в ее попытке упростить "рынок" до среднего прототипичного рационального инвестора.

Причины для того, чтобы работать в этом направлении, были благородны. В традиции западной науки отцы-основатели CMT попытались узнать что-то о целом, разделив проблему на ее основные составляющие. Попытка оказалась успешной. Благодаря дальновидной работе Марковица (Markowitz), Шарпа (Sharpe), Фамэ (Fama) и других мы добились огромных успехов за прошедшие 40 лет.

Однако, редуccionистский подход имеет свои пределы и мы их достигли. Пришло время более целостно взглянуть на работу рынков. В частности, пришло время признать большую разнородность, лежащую в основе рынков. Участие всех инвесторов не обусловлено одной и той же причиной, при этом инвесторы не используют свои стратегии на одних и тех же инвестиционных горизонтах. Стабильность рынков неизбежно связана с разнородностью инвесторов. «Зрелый» рынок разнороден, так же как и стар. Если бы у всех участников был один и тот же

горизонт инвестиций, если бы они одинаково реагировали на одну и ту же информацию и вкладывали бы капитал с одной и той же целью, повсюду правила бы нестабильность. Зрелые же рынки, напротив, обладают, в течение уже длительного времени, поразительной стабильностью. Дэйтрейдер может вести анонимную торговлю с пенсионным фондом: первый ведет частую торговлю ради краткосрочных прибылей; последний же торгует нечасто и ради долгосрочной финансовой безопасности. Дэйтрейдер реагирует на технические тенденции; инвестиции пенсионного фонда основываются на долгосрочном потенциале экономического роста. И все же, все действуют одновременно, и каждый диверсифицирует другого. Редукционистский подход, с его рациональным инвестором, не может справиться с такой разнородностью без сложных многоэлементных моделей, которые напоминают хитроумное изобретение Руба Гольдберга (Rube Goldberg). Эти модели, характеризующиеся многочисленными ограничивающими предположениями и требованиями, неизбежно терпят неудачу. Они настолько сложны, что испытывают недостаток гибкости, а гибкость является решающим фактором в любой динамической системе.

Первая цель этой книги состоит в том, чтобы представить фрактальную гипотезу рынка – основную переформулировку того, как и почему функционируют рынки. Вторая цель книги состоит в том, чтобы представить инструменты для анализа рынков в рамках фрактальной структуры. Многие существующие инструменты могут использоваться с этой целью. Я представляю новые инструменты, которые аналитики смогут добавить в свой набор, а также рассмотрю уже существующие инструменты.

Данная книга не является рассказом, хотя основной акцент, все же, делается на концептуальных аспектах. В рамках концептуальной структуры тщательно изучаются аналитические методы. Как и в предыдущей книге, я полагаю, каждый, кто обладает прочными знаниями в коммерческой статистике, найдет здесь много полезного. Основной акцент делается не на динамике, а на эмпирической статистике, т.е. на анализе временного ряда для определения того, с чем мы имеем дело.

СТРУКТУРА КНИГИ

Книга состоит из пяти частей и приложений. В последнем приложении приведены таблицы фрактального распределения. Другие значимые таблицы и цифры, связанные с обсуждением, вкраплены в текст. Каждая часть основывается на предыдущих частях, однако те, кто знаком с концепцией первой книги, могут читать эту книгу и непоследовательно.

Часть 1: Фрактальные временные ряды

В Главе 1 представляются фрактальные временные ряды и определяются пространственные и временные фракталы. Особое внимание уделяется тому, что такое фракталы, с концептуальной и с физической точки зрения. Почему они кажутся алогичными, даже несмотря на то, что фрактальная геометрия намного ближе к реальному миру, чем евклидова геометрия, которую мы все изучали в средней школе. В Главе 2 кратко рассматривается теория рынка капиталов (СМТ) и свидетельства

Введение

проблем теории. Глава 3 во многих отношениях является ядром книги. Я подробно излагаю гипотезу фрактального рынка в качестве альтернативы традиционной теории, обсуждаемой в Главе 2. Будучи теорией *фрактального* рынка, она объединяет элементы фракталов из Главы 1 с частями традиционной СМТ из Главы 2. Гипотеза фрактального рынка задает концептуальную структуру для фрактального анализа рынка.

Часть 2: Фрактальный (R/S) анализ

Определив в Части 1 проблемы, я предлагаю в Части 2 инструменты анализа – в частности, метод нормированного размаха (R/S-анализ). Многие технические вопросы, которые я получил после публикации первой книги, касались R/S-анализа, а также подробностей вычислений и критериев значимости. Эти вопросы рассматриваются в Частях 2 и 3. R/S-анализ является устойчивым методом анализа для раскрытия эффектов долговременной памяти, фрактальной статистической структуры и наличия циклов. В Главе 4 рассматривается концептуальная основа R/S-анализа и особенности его применения. В Главе 5 приводятся статистические критерии для оценки значимости результатов и примеров того, как R/S-анализ реагирует на известные стохастические модели. Глава 6 показывает, как R/S-анализ может использоваться для раскрытия как периодических, так и непериодических циклов.

Часть 3: Применение фрактального анализа

На примере разбора нескольких примеров в Части 3 подробно описывается, как могут использоваться методы R/S-анализа. Примеры, интересные сами по себе, были отобраны, чтобы проиллюстрировать преимущества и недостатки использования R/S-анализа на различных типах временных рядов и различных рынках. Одновременно рассказываются интересные факты о данных минимальных колебаний курса на бирже, волатильности рынка и о том, как денежное обращение отличается от других рынков.

Часть 4: Фрактальный шум

Используя R/S-анализ для поддержки гипотезы фрактального рынка, я показываю модели, объясняющие полученные результаты. Часть 4 рассматривает деятельность рынка с точки зрения стохастических процессов; по существу, в ней разбирается фрактальный шум. В Главе 13, на основе использования R/S-анализа, различные "цветные" шумы анализируются и сравниваются с анализом рынка. Полученные результаты удивительно похожи. Кроме того, дается значимое объяснение поведению волатильности. В Главе 14 обсуждается статистика процессов фрактального шума, которые выдвигаются в качестве альтернативы традиционному нормальному распределению (распределению Гаусса). Обсуждается влияние фрактальных распределений на модели рынка. В Главе 15 показано влияние фрактальной статистики на проблему выбора портфеля и опционное ценообразование. Рассматриваются методы адаптивирования таких моделей к фрактальным распределениям.

В Части 4 содержатся очень подробные описания, поэтому она подойдет не для всех читателей. Тем не менее, в связи с тем, что применение традиционной СМТ прочно укоренилось в большей части инвестиционного сообщества, я полагаю, что большинству читателей следует прочитать, по крайней мере, итоговый раздел каждой главы в Части 4. Глава 13, рассматривающая природу волатильности, представляет особый интерес.

Часть 5: Шумовой хаос

В Части 5 предлагается динамическая системная альтернатива стохастическим процессам, описанным в части 4. В частности, в качестве возможного объяснения фрактальной структуры рынков предлагается шумовой хаос. Глава 16, где дается R/S-анализ хаотических систем, раскрывает поразительную схожесть с рыночными и иными временными рядами. Особое внимание уделяется проведению различия между фрактальным шумом и шумовым хаосом. Рассматривается BDS-тест (тест Брока-Дечерта-Шейнкмана – Brock-Dechert-Scheinkman), который при использовании вместе с R/S-анализом может дать неопровержимые доказательства первого или второго. Глава 17 применяет фрактальную статистику к шумовому хаосу, примиряя два подхода. Предлагается объяснение того, почему признаки и фрактального шума, и шумового хаоса могут появляться одновременно. Результат тесно связан с гипотезой фрактального рынка и теорией множественных инвестиционных горизонтов.

Глава 18 – это обзор результатов на концептуальном уровне. Эта заключительная глава объединяет гипотезу фрактального рынка с эмпирической работой и теоретическими моделями, представленными в книге. Тем читателям, которые понимают проблему лучше, когда они знают решение, может оказаться полезным прочитать сначала Главу 18.

Приложения предлагают программное обеспечение, которое может использоваться для анализа, и воспроизводят таблицы фрактальных распределений.

Читая книгу, многие из вас зададутся вопросом, куда это ведет? *Поможет ли это мне зарабатывать деньги?* Эта книга не предлагает новые методы трейдинга и не определяет карманы неэффективности, на основе которых разумный инвестор может получить прибыль. Эта книга не предлагает стратегию того, как лучше делать прогнозы. Вместо этого она предлагает новое представление о том, как работают рынки и как проверить временной ряд на прогнозируемость. И что еще более важно, она дает дополнительную информацию о тех рисках, которым подвергаются инвесторы, и о том, как эти риски изменяются со временем. Если знание – сила, как говорится в старом выражении, то информация, представленная здесь, должна вести если не к силе, то, по крайней мере, к более высоким прибылям.

Эдгар Э. Петерс

Конкорд, штат Массачусетс

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
Содержание книги	5
ЧАСТЬ 1 ФРАКТАЛЬНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ	13
ВВЕДЕНИЕ ВО ФРАКТАЛЬНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ	13
<i>ФРАКТАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО</i>	13
<i>ФРАКТАЛЬНОЕ ВРЕМЯ</i>	15
<i>ФРАКТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА</i>	19
<i>ИГРА ХАОСА</i>	20
<i>ЧТО ТАКОЕ ФРАКТАЛ?</i>	22
<i>ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ</i>	25
<i>ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЫНКА</i>	26
НЕСОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ГАУССОВОЙ ГИПОТЕЗЫ	28
<i>ТЕОРИЯ РЫНКА КАПИТАЛА</i>	29
<i>СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЫНКОВ</i>	30
<i>ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ВОЛАТИЛЬНОСТИ</i>	37
Акции	37
Облигации	40
Валюта	42
<i>ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО</i>	45
<i>ВЫВОДЫ</i>	47
ГИПОТЕЗА ФРАКТАЛЬНОГО РЫНКА	48
<i>И СНОВА ЭФФЕКТИВНЫЕ РЫНКИ</i>	48
<i>УСТОЙЧИВЫЕ РЫНКИ ПРОТИВ ЭФФЕКТИВНЫХ РЫНКОВ</i>	50
<i>ИСТОЧНИК ЛИКВИДНОСТИ</i>	51
<i>ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА И ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ГОРИЗОНТЫ</i>	52
<i>СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЫНКОВ. ПОВТОРЕНИЕ</i>	52
<i>ГИПОТЕЗА ФРАКТАЛЬНОГО РЫНКА</i>	54
<i>ВЫВОДЫ</i>	57
ЧАСТЬ 2 ФРАКТАЛЬНЫЙ (R/S) АНАЛИЗ	61
ИЗМЕРЕНИЕ ПАМЯТИ – ПРОЦЕСС ХЕРСТА И R/S-АНАЛИЗ	61
<i>ПРЕДИПОСЫЛКИ: РАЗВИТИЕ R/S-АНАЛИЗА</i>	62
<i>ЭФФЕКТ ДЖОКЕРА</i>	67
<i>R/S-АНАЛИЗ: РУКОВОДСТВО ШАГ ЗА ШАГОМ</i>	69
<i>ПРИМЕР: ОБМЕННЫЙ КУРС ИЕНА/ДОЛЛАР</i>	70
ПРОВЕРКА R/S-АНАЛИЗА	73
<i>СЛУЧАЙНАЯ НУЛЕВАЯ ГИПОТЕЗА</i>	73
Моделирование методом Монте-Карло	75
Ожидаемое значение показателя Херста	78
<i>СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ</i>	81
Авторегрессионные процессы	82
Процессы скользящего среднего	84
ARMA модели	85
ARIMA модели	86

Модели ARCH _____	87
Проблемы со стохастическими моделями _____	89
ВЫВОДЫ _____	90
НАХОЖДЕНИЕ ЦИКЛОВ: ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ _____	91
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ _____	93
НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ _____	97
Статистические циклы _____	98
Хаотические циклы _____	100
Добавление шума _____	103
Эмпирический пример: солнечные пятна _____	105
ВЫВОДЫ _____	107
ЧАСТЬ 3 ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА _____	109
МЕТОДОЛОГИЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ _____	109
МЕТОДОЛОГИЯ _____	110
ДАННЫЕ _____	111
АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ _____	112
Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 1888-1990:	
ИДЕАЛЬНЫЙ НАБОР ДАННЫХ _____	114
ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ ПРОТИВ ОТРЕЗКА ВРЕМЕНИ _____	114
ДВАДЦАТИДНЕВНЫЕ ПРИБЫЛИ _____	114
ПЯТИДНЕВНЫЕ ПРИБЫЛИ _____	118
ОДНОДНЕВНЫЕ ПРИБЫЛИ _____	121
АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ _____	126
Чувствительность точки _____	127
Чувствительность времени _____	128
ПЕРВОИЗЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И СЕРИАЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ _____	129
ВЫВОДЫ _____	132
ДАННЫЕ О МИНИМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КУРСА ПО ИНДЕКСУ S&P 500, 1989-1992:	
ПРОБЛЕМЫ ИЗБЫТОЧНОЙ ВЫБОРКИ _____	133
НЕСКОРРЕКТРОВАННЫЕ ДАННЫЕ _____	135
AR(1)-РАЗНОСТИ _____	137
ВЫВОДЫ _____	141
ВОЛАТИЛЬНОСТЬ: ИССЛЕДОВАНИЕ АНТИПЕРСИСТЕНТНОСТИ _____	143
РЕАЛИЗОВАННАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ _____	146
ПОДРАЗУМЕВАЕМАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ _____	148
ВЫВОДЫ _____	149
ПРОБЛЕМЫ НЕДОСТАТОЧНОЙ ВЫБОРКИ: ЗОЛОТО И ИНФЛЯЦИЯ В ВЕЛИКОБРИТАНИИ _____	150
НЕДОСТАТОЧНАЯ ВЫБОРКА ПЕРВОГО ТИПА: СЛИШКОМ МАЛО ВРЕМЕНИ _____	150
НЕДОСТАТОЧНАЯ ВЫБОРКА ВТОРОГО ТИПА: СЛИШКОМ НИЗКАЯ ЧАСТОТА _____	153
ДВА НЕУБЕДИТЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯ _____	154
Золото _____	154
Инфляция в Великобритании _____	155
ВЫВОДЫ _____	156
ВАЛЮТА: ИСТИННЫЙ ПРОЦЕСС ХЕРСТА _____	157
ДАННЫЕ _____	158
БЕНАДОЛЛАР _____	158
МАРКА/ДОЛЛАР _____	161
ФУНТ/ДОЛЛАР _____	161

НЕИМФУИТ	162
ВЫВОДЫ	163
ЧАСТЬ 4 ФРАКТАЛЬНЫЙ ШУМ	165
ДРОБНЫЙ ШУМ И R/S-АНАЛИЗ	165
ЦВЕТ ШУМА	166
РОЗОВЫЙ ШУМ: $0 < H < 0,50$	167
Процессы релаксации	168
Переменяемость	172
ЧЕРНЫЙ ШУМ: $0,50 < H < 1,0$	178
Эффект Иосифа	178
Эффект Ноя	181
ЗЕРКАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ	182
ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ: МОДЕЛИ ARFIMA	183
Характеристики ARFIMA (0,d,0)	184
Комментарий к характеристикам	186
ARFIMA (p,d,q)	186
ВЫВОДЫ	190
ФРАКТАЛЬНАЯ СТАТИСТИКА	191
ФРАКТАЛЬНЫЕ (УСТОЙЧИВЫЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	192
Характеристические функции	193
Бесконечная дисперсия и среднее	194
Частные случаи: нормальное распределение и распределение Коши	198
Толстые хвосты и закон Парето	199
УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СЛОЖЕНИИ	199
ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	200
Самоподобие	200
Аддитивность	200
Разрывы: скачки цен	201
ИЗМЕРЕНИЕ α	201
R/S-анализ	204
Спектральный анализ	205
ИЗМЕРЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	205
БЕЗГРАНИЧНАЯ ДЕЛИМОСТЬ И IGARCH	206
ВЫВОДЫ	207
ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ СТАТИСТИКИ	209
ВЫБОР ПОРТФЕЛЯ	210
ОЦЕНКА ОПЦИОНА	215
Подход Маккаллока	216
Спот и форвардные цены	216
Оptionное ценообразование	218
Коэффициент псевдохеджирования	220
Численные значения опциона	220
Заключение	222
ВЫВОДЫ	222
ЧАСТЬ 5 ШУМОВОЙ ХАОС	225
Шумовой хаос и R/S-анализ	225
ИНФОРМАЦИЯ И ИНВЕСТОРЫ	226

ХАОС	228
Фазовое пространство	229
ПРИМЕНЕНИЕ R/S-АНАЛИЗА	230
Показатель шума	230
Системный шум	232
Циклы	233
РАЗЛИЧИЕНИЕ ШУМОВОГО ХАОСА И ДРОБНОГО ШУМА	234
BDS-тест	235
Объединение испытаний	239
Последствия для FMH	239
ВЫВОДЫ	239
ФРАКТАЛЬНАЯ СТАТИСТИКА, ШУМОВОЙ ХАОС И FMH	240
ЧАСТОТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	240
ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ВОЛАТИЛЬНОСТИ	244
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ И СРЕДНЕЕ	246
ИЗМЕРЕНИЕ α/α	250
Графический метод	250
R/S-анализ	251
ВЕРОЯТНОСТЬ ШУМОВОГО ХАОСА	251
ОРБИТАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ	252
САМОПОДОБИЕ	255
ПРЕДЛОЖЕНИЕ: ОБЪЕДИНЕНИЕ GARCH, FBM И ХАОСА	257
ПОНИМАНИЕ РЫНКОВ	258
ИНФОРМАЦИЯ И ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ГОРИЗОНТЫ	258
СТАБИЛЬНОСТЬ	259
РИСК	260
ДОЛГОВРЕМЕННАЯ ПАМЯТЬ	261
ЦИКЛЫ	261
ВОЛАТИЛЬНОСТЬ	262
К БОЛЕЕ ПОЛНОЙ РЫНОЧНОЙ ТЕОРИИ	262
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	265
Игра хаоса	265
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	267
Программы на языке GAUSS	267
ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМИРОВАННОГО РАЗМАХА	268
ВЫЧИСЛЕНИЕ $E(R/S)$	270
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ И СРЕДНЕГО	271
ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ВОЛАТИЛЬНОСТИ	272
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	275
Таблицы фрактальных распределений	275
ГЕНЕРИРОВАНИЕ ТАБЛИЦ	275
АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ	277
ОПИСАНИЕ ТАБЛИЦ	278
ГЛОССАРИЙ	284
БИБЛИОГРАФИЯ	293

Часть 1

ФРАКТАЛЬНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

1

Введение во фрактальные временные ряды

Западная культура долгое время была одержима гладким и симметричным. Не все культуры одержимы подобным образом, но Запад (в смысле европейского происхождения) долго рассматривал совершенные формы как симметричные, гладкие и целостные. Мы повсюду ищем модели и симметрию. Часто мы навязываем модели тому, где они не существуют, и мы отрицаем те модели, которые не соответствуют нашей общей концептуальной структуре. Таким образом, когда модели не являются симметричными и гладкими, мы классифицируем их как иллюзии.

Этот конфликт берет свое начало у древних греков. Для описания нашего физического мира они создали геометрию, основанную на чистых, симметричных и гладких формах. Платон говорил, что "реальный" мир состоит из этих форм. Эти формы были созданы силой или существом, называемым "Благо". Мир Блага можно было увидеть только изредка, посредством мышления. Мир, в котором мы живем – это несовершенная копия реального мира, которая была создана другим существом, называемым "Демииург". Демииург, меньшее существо, чем Благо, был обречен создавать низшие копии реального мира. Эти копии были грубы, асимметричны и подвержены распаду. Таким образом, Платон использовал неспособность греческой геометрии, позже формализованной Евклидом, для описания нашего мира. Проблема заключалась не в геометрии, а в нашем мире.

ФРАКТАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Фрактальная геометрия – геометрия Демииурга. В отличие от евклидовой геометрии она основывается на грубости и асимметрии. Объекты не являются вариациями нескольких совершенных и симметричных форм, они бесконечно сложны. Чем более внимательно они исследуются, тем больше деталей раскрывается. Например, дерево – это фрактальная форма. Представьте хвойное дерево, например, орегонскую пихту, которую обычно используют для рождественских елок. Дети часто рисуют орегонские пихты в виде треугольников (ветви) с прямоугольными основаниями (стволы деревьев), делая деревья настолько симметричными, насколько это возможно. На логотипах рождественские елки выглядят так же, или треугольники

Часть 1. Фрактальные временные ряды

на них заменены конусами. И все же, орегонские пихты не представляют собой треугольники или конусы. Они представляют собой сеть ветвей, качественно подобных форме всего дерева, но каждая отдельная ветвь непохожа на другие. Ветви на ветвях (последовательные поколения ветвей) постепенно становятся меньше. И все же, в пределах каждого поколения существует, фактически, диапазон размеров. И, кроме того, *каждое дерево отлично от других*.

Евклидова геометрия не может воспроизвести дерево. Используя евклидову геометрию, мы можем создать приближение дерева, но оно всегда выглядит искусственным, как рисунок ребенка или логотип. Евклидова геометрия воссоздает *воспринимаемую* симметрию дерева, но не разнообразие, которое фактически составляет его структуру. В основе такой воспринимаемой симметрии лежит управляемая хаотичность и увеличивающаяся сложность на более тонких уровнях разрешения. Такое качество «самоподобия» является определяющим свойством фракталов. Большинство естественных структур, особенно живые существа, обладают этим свойством.

Вторая проблема, возникающая при применении евклидовой геометрии к нашему миру, – это проблема размерности. Мы живем в трехмерном мире, но только твердые формы являются действительно трехмерными, согласно определениям, которые являются основой евклидовой геометрии. В математических терминах объект должен быть дифференцируем на протяжении всей его поверхности. Полый пластмассовый мячик с отверстиями не является трехмерным объектом, хотя он принадлежит трехмерному пространству.

Кроме того, наше *восприятие* размерности может изменяться в зависимости от нашего расстояния от объекта. С некоторого расстояния орегонская пихта напоминает двумерный треугольник. Когда мы подходим ближе, она производит впечатление трехмерного конуса. Подойдя еще ближе, мы уже можем различить ее ветви, и она выглядит как сеть одномерных линий. Исследование с более близкого расстояния показывает, что ветви – это трехмерные трубки. Евклидова геометрия также испытывает трудности с размерностью созданий Демиурга и с возрастающей сложностью. Евклидовы структуры, напротив, становятся проще по мере уменьшения масштаба. Трехмерное твердое тело уменьшается до двумерной плоскости. Двумерная плоскость складывается из одномерных линий и, наконец, из безразмерных точек. Наше восприятие дерева, с другой стороны, шло от двумерного к трехмерному, затем к одномерному, а затем обратно к трехмерному. Такое восприятие отличается от евклидова восприятия.

Евклидова геометрия полезна только в качестве общего упрощения мира Демиурга. Фрактальная геометрия, напротив, характеризуется самоподобием и повышением сложности при увеличении. В качестве геометрии пространства она в основном применялась для создания реалистичных ландшафтов посредством компьютеров.

Демиург создал не только фрактальное пространство, но и фрактальное время. Хотя наше основное внимание будет сосредоточено на фрактальном временном ряде, фрактальное пространство поможет нам понять фрактальное время. Мы увидим

разницу между гладкостью евклидового мира и грубостью нашего мира, что ограничивает пригодность евклидовой геометрии как метода описания.

ФРАКТАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Конфликт между симметрией евклидовой геометрии и асимметрией реального мира может быть далее продлен до нашего понятия времени. Традиционно, события рассматриваются либо как случайные, либо как детерминированные. В детерминированном представлении все события во времени определены с момента создания. Это представление было теологически обосновано кальвинистами и научно подтверждено некоторыми теоретиками "большого взрыва". Напротив, нигилистические группы полагают, что все события случайны и не происходят ни из какой структуры или порядка во времени.

Во фрактальном времени случайность и детерминизм, хаос и порядок сосуществуют. Во фрактальных формах мы видим физическое представление того, как эти противоположности взаимодействуют. Хвойное дерево обладает глобальной структурой и локальной случайностью. В общем, мы знаем, как выглядит хвойное дерево, и мы можем предсказать общую или глобальную форму любого хвойного дерева с высокой степенью точности. Однако, на уровне отдельной ветви, каждая ветвь индивидуальна. Мы не знаем ее длину или ее диаметр. Все деревья разные, но они обладают некоторыми общими глобальными свойствами. Каждое дерево обладает локальной случайностью и глобальным детерминизмом. В этом разделе мы исследуем, как развивалось понятие фрактального времени и что оно означает.

Большинство культур оказывает предпочтение детерминистическому представлению о времени. Нам нравится думать, что у нас есть свое место во вселенной, что у нас есть судьба. И все же, мы видим случайные, катастрофические события, которые могут помешать нам выполнить нашу цель. Стихийные бедствия могут разрушить нашу окружающую среду. Экономические бедствия могут забрать то, что мы имеем. Люди, которых мы не знаем, могут отнять у нас наши жизни, случайно или со злым умыслом. Или наоборот, нам может сопутствовать удача, если мы окажемся в нужном месте в нужное время. Случайная встреча может открыть новые возможности. Выбор правильных чисел в лотерее может принести нам состояние.

Кажется, что и великие события зависят от случая. Ньютон увидел падающий предмет (в легенде говорится, что это было яблоко) и сформулировал исчисление и законы всемирного тяготения. Флеминг оставил чашку Петри открытой и открыл пенициллин. Дарвин решил отправиться в путешествие и сформулировал теорию эволюции на основании того, что он пережил во время этого путешествия.

Эти и подобные события, казалось бы, произошли случайно и изменили историю. Однако Лейбниц развил исчисление независимо от Ньютона, почти в то же самое время – фактически, мы используем систему обозначений Лейбница. Уоллис развивал теорию естественного отбора независимо от Дарвина, хотя и позже. Благодаря работе Уоллиса Дарвин нашел в себе силы написать *«Происхождение*

Часть 1. Фрактальные временные ряды

видов», в результате чего он прославился как первоначальный разработчик этой теории. В нашей области финансовой экономики теория, известная как модель оценки капитальных активов (Capital Asset Pricing Model – CAPM), была разработана независимо не менее, чем тремя людьми – Шарпом (Sharpe, 1964), Линтнером (Lintner, 1965) и Моссином (Mossin, 1966) – почти в одно и то же время. Это подразумевает, что этим открытиям было предназначено случиться. Этого требовала история. Такова была их судьба.

Трудно примирить случайность и порядок, стечение обстоятельств и необходимость или свободную волю и детерминизм. Это дихотомия – снова Демиург, недостаточно хорошо копирующий Благо?

События воспринимаются либо как случайные, и поэтому непредсказуемые, либо как детерминированные и совершенно предсказуемые. До начала 20-го столетия было общепринято мнение, что вселенная работает как часы. В конечном счете, ученые должны были обнаружить уравнения, лежащие в основе вселенной, и прийти к возможности предсказать ее возможный курс. Время не имело значения в ньютоновой механике; теоретически, время могло быть повернуто в обратную сторону, потому что уравнения Ньютона работали одинаково хорошо независимо от того, шло ли время вперед или назад. Необратимое время, первый удар для этого детерминистического представления, пришло в середине 19-ого столетия из находящейся на стадии становления области термодинамики.

Термодинамика возникла как изучение тепловых потерь механизмов. Прежде чем ученые серьезно отнеслись к термодинамике, прикладной науке, прошло некоторое время. Начальные исследования акцентировали внимание на том, как энергия преобразуется в полезную работу. В системе типа парового двигателя пар поворачивает колеса и выполняет функцию, например, приведения в действие гребного колеса лодки. Не вся произведенная энергия преобразуется в работу. Некоторая ее часть теряется или рассеивается как трение. Исследование таких "диссипативных систем", в конечном счете, привело к привлечению гидродинамики. Гидродинамика, которая исследовала нагревание и смешивание жидкостей, дала нам необратимые во времени системы.

Предположим, что два литра жидкости разделены водонепроницаемой съемной перегородкой. На одной стороне – литр красной жидкости; на другой – литр синей. Мы решаем использовать термин «энтропия» в качестве меры степени смешивания красной и синей жидкости. Пока перегородка находится на месте, мы имеем низкую энтропию. Если мы удалим перегородку, красная и синяя жидкости перетекут друг в друга, и уровень энтропии повысится, поскольку жидкости становятся более смешанными. В конечном счете, когда красный и синий цвет полностью перемешаются, вся жидкость станет фиолетовой.

Будучи полностью перемешанной, жидкость достигла состояния равновесия. Она не может стать "более перемешанной". Она достигла уровня максимальной энтропии. Однако мы не можем сделать жидкость снова «несмешанной». Несмотря на то, что смешивание жидкостей понимается в динамических терминах, этот процесс зависим от времени и *необратим*.

1. Введение во фрактальные временные ряды

Состояние высокой энтропии, или *неопределенности*, жидкости, которое возникает в результате максимального смешивания двух состояний (в данном случае состояния помечены как "красное" и "синее"), не может быть описано обратимыми во времени ньютоновыми уравнениями. Жидкость никогда не будет несмешанной; ее энтропия никогда не уменьшится, даже если мы будем ждать вечность. В термодинамике стрелка времени указывает только в будущее. Первый удар был нанесен по представлению о вселенной как о часовом механизме.

Второй удар был нанесен с появлением квантовой механики. Осознание того, что молекулярная структура вселенной может быть описана только состояниями вероятности, еще более подорвала детерминистическое представление. Но все еще оставалось сомнение. Вселенная детерминирована или случайна?

Постепенно стало очевидным, что самые естественные системы характеризуются локальной случайностью и глобальным детерминизмом. Эти противоположные состояния должны сосуществовать. Детерминизм дает нам закон природы. Случайность привносит новшество и разнообразие. Здоровая, развивающаяся система – это та, которая не только может пережить случайные удары, но также может поглотить такие удары, чтобы улучшить всю систему, когда это станет целесообразно.

Например, Уэстом и Гольдбергером (West and Goldberger, 1987) постулировалось, что физические фрактальные структуры созданы природой, потому что они более устойчивы к ошибкам, чем симметрические структуры, использованные в их создании. Возьмем легкое млекопитающего. Его главный отдел, трахея, делится на два ответвления. Эти два ответвления продолжают ветвиться. В каждом поколении ответвлений средний диаметр уменьшается согласно степенной зависимости. Таким образом, диаметр каждого поколения зависит от диаметров предыдущего поколения. Кроме того, в пределах каждого поколения ответвлений фактически имеется диапазон диаметров. Средний диаметр каждого поколения постепенно уменьшается согласно степенной зависимости, но любое отдельное ответвление может быть описано только в вероятностном смысле. Мы имеем глобальный детерминизм (средний размер ответвления) и локальную случайность (диаметр отдельных ответвлений). Почему природа благосклонна к этой структуре, которая имеется в легких всех млекопитающих? Уэст и Гольдбергер показали, что эта фрактальная структура более стабильна и устойчива к ошибкам, чем другие структуры. Запомните, что каждое поколение ответвлений зависит от предшествующих поколений. Если бы диаметры изменялись экспоненциально, ошибка в формировании одного поколения не только бы затрагивала следующее поколение ответвлений, но эта ошибка росла бы с каждым последующим поколением. Маленькая ошибка могла бы сделать легкое бесформенным и атрофированным. Тем не менее, при фрактальном масштабировании ошибка оказывает меньше воздействия вследствие степенной зависимости, а также местной вероятностной структуры. Поскольку каждое поколение обладает диапазоном диаметров, одно бесформенное ответвление оказывает меньше влияния на формирование других. Таким образом, фрактальная

Часть 1. Фрактальные временные ряды

структура (глобальный детерминизм, локальная случайность) более устойчива к ошибкам в процессе формирования, чем другие структуры.

Далее, если мы перенесем это понятие со статической структуры (легкое) на динамическую структуру, например, фондовый рынок, мы можем сделать некоторые интересные предположения. Поменяем поколение ответвлений на "инвестиционный горизонт". Фондовый рынок состоит из инвесторов, начиная с тик-трейдеров и заканчивая долгосрочными инвесторами. У каждого есть индивидуальный инвестиционный горизонт, который может быть упорядочен во времени. Стабильный рынок – это рынок, на котором все участники могут осуществлять операции друг с другом, при этом все подвергаются одинаковым рискам, в зависимости от присущих каждому участнику шкалы времени и инвестиционного горизонта. Мы увидим в Главе 2, что плотность распределения прибыли¹ одинакова для дэйтрейдеров и для недельной или, даже, 90-дневной прибыли, с учетом корректировки масштаба. То есть пятиминутные трейдеры сталкиваются с тем же самым риском крупного события, что и трейдеры с недельным горизонтом. Если в масштабе времени дэйтрейдера имеет место крах, например, событие четыре-сигма, рынок остается стабильным, если другие трейдеры, которые имеют другие торговые горизонты, рассматривают такой крах как возможность покупки, и они эту покупку совершают. Таким образом, рынок остается стабильным, потому что он не имеет характерного масштаба времени, так же, как легкое не имело характерного масштаба диаметра. Когда весь инвестиционный горизонт рынка сокращается, и каждый становится одномоментным трейдером (инвесторы потеряли веру в долгосрочную информацию), рынок становится беспорядочным и нестабильным. Следовательно, рынок может поглощать удары до тех пор, пока он сохраняет свою фрактальную структуру. Когда он теряет такую структуру, наступает нестабильность. Мы обсудим эту концепцию более полно в Главе 3.

Другой пример зависимости от времени обнаруживается в формировании живых существ, таких как млекопитающие и рептилии. И снова мы сталкиваемся с локальной случайностью и глобальным детерминизмом. При формировании зародыша первичная клетка неоднократно делится. В некоторый момент (точно не известно, почему) некоторые клетки формируют сердце, некоторые – легкие, и так далее. Эти клетки мигрируют к своим надлежащим местоположениям; эту специализацию вызывает детерминистический процесс некоторого вида. В процессе движения клеток большинство достигает назначенного местоположения, но некоторые клетки погибают. Таким образом, на местном клеточном уровне жизнь или смерть отдельной клетки являются полностью вероятностными, в то время как на глобальном уровне детерминистический процесс вызывает перемещение клеток,

¹ Здесь и далее в книге используется перевод для слова "returns" как прибыли. Хотя лучше было бы использовать термин приращение и/или исход (испытания). Однако, в предыдущей книге Петерса переводчик использовал термин прибыли и мы решили оставить его, напомнив, однако, читателю, что прибыль может быть и отрицательной. Именно поэтому термин приращение интуитивно более подходит, но для преемственности изложения мы оставили "прибыли". (Прим. науч. ред.)

необходимых для организации жизни.

Другой пример – жидкость, нагретая снизу. На низких уровнях жидкость нагревается путем конвекции, достигая, в конечном счете, уровня равновесия максимальной энтропии. Все молекулы воды перемещаются независимо.

Существует и глобальная, и локальная случайность. Однако, как только теплота преодолевает критический уровень, независимые молекулы ведут себя когерентно, поскольку начинается конвекция. Жидкость, нагретая снизу, поднимается к верхним уровням, охлаждается и снова опускается, создавая круговорот. Отдельные молекулы начинают вести себя когерентно, как группа. Ученые знают точно, когда начнется эта конвекция (называемая конвекцией Релея-Бенара). Известно направление конвекции. Часть жидкости движется направо, а часть – налево. Никак нельзя предсказать, в каком направлении пойдет конвекция. Еще раз повторим, мы имеем глобальный детерминизм (температура, при которой начинается конвекция) и локальную случайность (направление движения конвекции).

Наконец, мы имеем развитие общества и идей. Новшества, такие как развитие САРМ, часто возникают спонтанно и независимо. Вероятность того, что любой человек создаст такое новшество, случайна, независимо от многообещающих способностей человека. Все же, для эволюционирования и развития любой системы появление таких новшеств должно ожидаться на глобальном основании – будь то в науке, правительстве, искусстве или экономике – если ожидается, что система выживет.

В мире Демиурга случайность равняется новшеству, а детерминизм объясняет, как система использует новшество. На рынках новшество – это информация, а детерминизм – это то, как рынки оценивают эту информацию.

Теперь мы подошли к третьему удару по детерминизму Ньютона: наука хаоса и фракталов, где случайность и необходимость сосуществуют. В этих системах энтропия высока, но никогда не достигает максимального состояния беспорядка из-за глобального детерминизма, как в случае с конвекцией Релея-Бенара. Хаотические системы экспортируют свою энтропию или "рассеивают" ее, аналогично тому, как механические устройства рассеивают часть своей энергии как трение. Таким образом, хаотические системы также являются рассеивающими и имеют много общих свойств с термодинамикой – особенно, стрелой времени.

ФРАКТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Все это концептуальное различие между миром Демиурга и евклидовой геометрией Блага, конечно, интересно, но может ли оно быть использовано на практике? В конце концов, главное преимущество евклидовой геометрии – ее изящная простота. С помощью евклидовой геометрии проблемы могут быть аппроксимированы и решены для нахождения оптимальных ответов. Модели могут быть легко сформированы, даже если они являются общими упрощениями. Могут ли эти постоянно усложняющиеся формы, которые мы называли фракталами, также быть смоделированы?

Часть 1. Фрактальные временные ряды

Ответ – «Да». Как ни странно, они могут быть смоделированы довольно простым способом. Тем не менее, фрактальная математика часто кажется алогичной и неточной. Она кажется алогичной потому, что всех нас, даже не математиков, учили думать по Евклиду. То есть мы приближаем естественные объекты к простым формам, таким как детские рисунки сосен. Детали добавляются позднее, независимо от главной формы. Фрактальная математика кажется неточной, потому что традиционные математические доказательства трудно находить и развивать: наше понятие "доказательства" происходит, снова, из древнегреческой геометрии. Евклид создал систему аксиом, теорем и доказательства для своей геометрии. С тех пор мы распространили эти понятия на все остальные разделы математики. Фрактальная геометрия имеет свою долю доказательств, но наш основной метод для исследования фракталов – это метод, основанный на численных экспериментах. Используя компьютер, мы можем генерировать решения и исследовать импликации наших фрактальных формул. Такая "экспериментальная" форма исследования математики является новой и еще пока не заслужила уважения большинства чистых математиков.

ИГРА ХАОСА

Следующий пример математического эксперимента использовался в моей более ранней книге *«Хаос и порядок на рынках капитала»* (Peters, 1991a), а также в других текстах. Первоначально он был придуман Барнсли (Barnesley, 1988), который неофициально называет его *игрой хаоса*.

Игра начинается с трех точек, которые очерчивают треугольник. Обозначим три точки как (1,2), (3,4) и (5,6). Это – поле для игры, которое показано на рисунке 1.1(a). Теперь выберите точку наугад. Эта точка может быть в пределах очертания треугольника или вне его. Пометьте точку Р. Бросьте правильную игральную кость. Продвиньтесь на половину расстояния от точки Р к точке (или углу), помеченному выпавшим числом, и поставьте новую точку. Если у вас выпала цифра 6, продвиньтесь на половину расстояния от точки Р к углу С (5,6) и поставьте новую точку (Рис. 1.1(b)). Используя компьютер, повторите эти шаги 10 000 раз. Если первые 50 точек у вас выпали как переходные процессы, в конце у вас получится картинка, показанная на рисунке 1.1 (с). Такая фигура получила название треугольника Серпинского, и она представляет собой бесконечное число треугольников, содержащихся внутри большого треугольника. Если вы увеличите разрешение, вы увидите еще больше маленьких треугольников. Такое самоподобие является важным (хотя не единственным) свойством фракталов.

Интересно, что форма не зависит от исходной точки. Неважно, где вы начинаете, вы всегда приходите к треугольнику Серпинского, несмотря на то, что для игры необходимы два "случайных" события: (1) выбор исходной точки и (2) выпадение кости. Таким образом, на местном уровне точки всегда расставляются в случайном порядке. Несмотря на то, что точки расставляются в разном порядке каждый раз, когда мы играем в эту игру, треугольник Серпинского появляется всегда, потому что система реагирует на случайные события детерминистическим образом.

1. Введение во фрактальные временные ряды

Локальная случайность и глобальный детерминизм создают стабильную структуру. Приложение 1 включает программную оболочку BASIC для создания треугольника Серпинского. Попробуйте эту игру сами.

Игра хаоса показывает, что локальная случайность и глобальный детерминизм могут сосуществовать, чтобы создать стабильную, самоподобную структуру, которую мы назвали фракталом. Предсказать фактическую последовательность точек невозможно. И, тем не менее, шансы расстановки каждой точки *не* равны. Вероятность заполнения пустых пространств в пределах каждого треугольника, составляет ноль процентов. Грани, очерчивающие каждый треугольник, имеют более высокую вероятность появления. Таким образом, локальная случайность не равна равной вероятности всех возможных решений. Она также не приравнивается к независимости. Положение следующей точки полностью зависит от текущей точки, которая сама зависит от предыдущих точек. Из этого мы можем заключить, что "фрактальная статистика" будет отличаться от ее гауссова аналога.

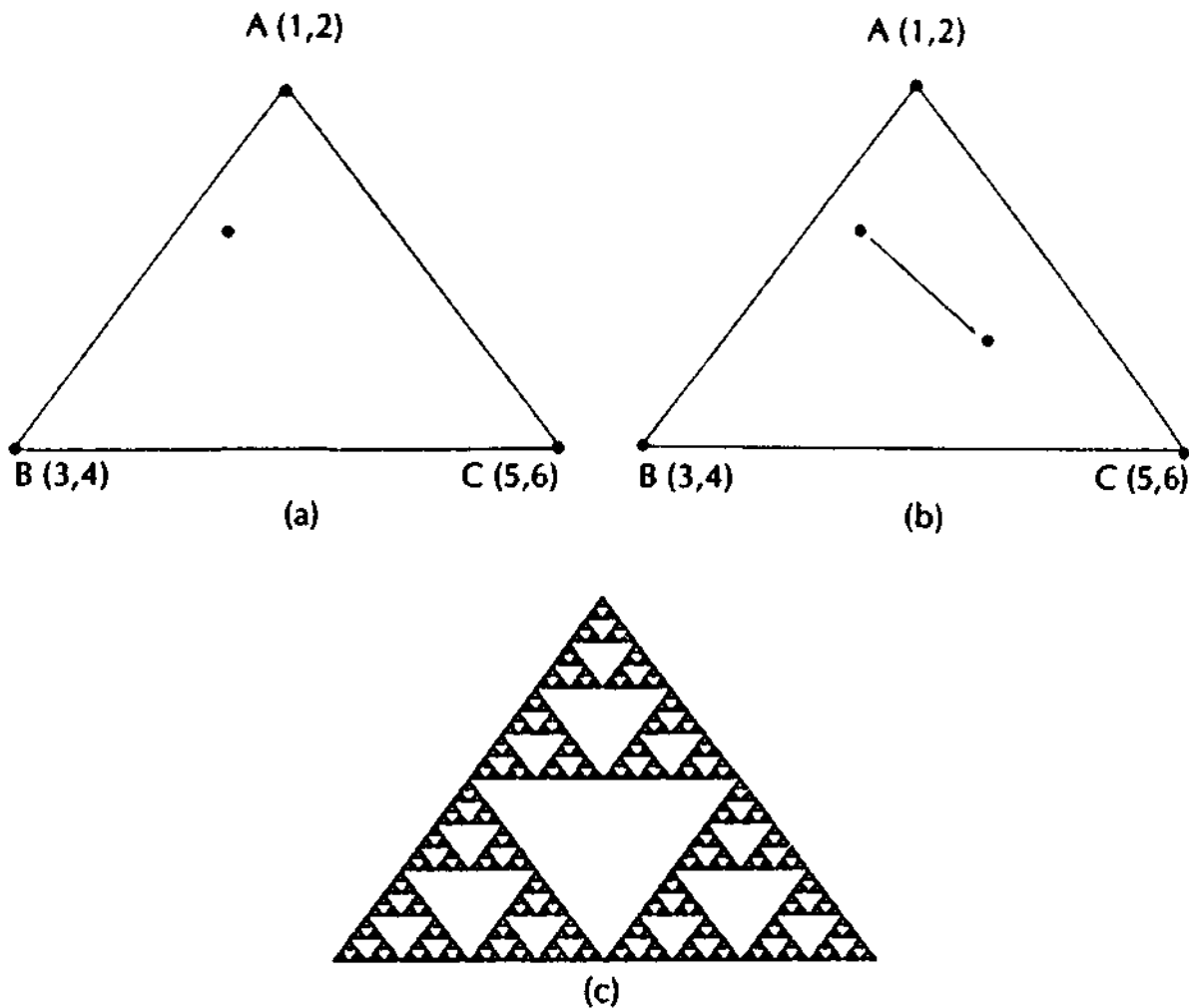


РИСУНОК 1.1 Игра Хаоса. (а) Начните с трех точек, находящихся на равном расстоянии друг от друга, и наугад поставьте точку в пределах, заданных точками.

(b) Предположим, что вы бросили кость, на которой выпала цифра 6; вы проходите половину расстояния до точки, помеченной как C(5,6). (c) Повторите шаг (b) 10 000 раз и у вас получится треугольник Серпинского.

Часть 1. Фрактальные временные ряды

В данный момент интуитивно может быть проведена связь с рынками. Рынки могут быть в местном масштабе случайны, но они имеют глобальную статистическую структуру, которая является неслучайной. Таким образом, традиционная количественная теория имела бы тенденцию поддерживать локальную случайность. Испытания на "эффективность рынка" долго сосредотачивались на том, могут ли краткосрочные прогнозы быть сделаны с достаточной точностью, чтобы принести прибыль. Как правило, количественные исследования показывали, что трудно получить прибыль от краткосрочного (недельного или меньшего) оживления на рынке. Тем не менее, удлинение нашего горизонта времени, как оказывается, улучшает нашу прогнозирующую способность.

ЧТО ТАКОЕ ФРАКТАЛ?

Мы еще не определили *термин «фрактал»*. Фактически не существует точного определения. И даже математика, самый лаконичный из всех языков, испытывает затруднения при описании фрактала. Это подобно вопросу, сформулированному Глубокой Мыслью в «*Путеводителе путешественника автостопом по Галактике*» Дугласа Адамса. Глубокая Мысль – суперкомпьютер, созданный высшей расой, чтобы ответить "на последний вопрос жизни, вселенной и всего". Глубокая Мысль дает ответ (ответ – "42"), но никто не знает, как задать вопрос таким образом, чтобы ответ мог быть понят.

Это похоже на фракталы. Мы узнаем их, когда мы их видим, но мы испытываем трудности, описывая их с достаточной точностью для того, чтобы понять полностью, что они собой представляют. Бенуа Мандельброт (Benoit Mandelbrot), отец фрактальной геометрии, тоже не сформулировал точного определения.

Фракталы действительно имеют определенные особенности, которые измеримы, и свойства, которые являются желательными для целей моделирования.

Первое свойство, *самоподобие*, уже было описано довольно подробно. Оно означает, что части в некотором роде связаны с целым. Это подобие может быть "точным", как в треугольнике Серпинского, где каждый маленький треугольник геометрически идентичен большому треугольнику. Такая точная форма самоподобия существует только математически.

В действительности, самоподобие "качественно"; то есть объект или процесс являются подобными в различных масштабах, пространственных или временных, статистически. Каждый масштаб напоминает другие масштабы, но не идентичен им. Отдельные ветви дерева качественно самоподобны другим ветвям, но каждая ветвь также является уникальной. Это свойство самоподобия делает фрактал *масштабно-инвариантным*: он испытывает недостаток в характерном масштабе, из которого происходят другие.

Логарифмическая спираль, которая играет заметную роль в теории волн Эллиотта, является одним из примеров характеристической функции масштаба.

Раковина моллюска «кораблик» – логарифмическая спираль, потому что спираль сохраняет свои исходные пропорции по мере увеличения размера. Поэтому

1. Введение во фрактальные временные ряды

кораблик растет, но не меняет свою форму, потому что он растет в соответствии с характерной пропорцией – он обладает характерной масштабной чертой. Логарифмическая спираль не является фрактальной. Теория волн Эллиотта также таковой не является.

Аналогично, ранние модели объяснения строения легкого млекопитающих основывались на экспоненциальном механизме масштабирования. В частности, диаметр каждого поколения ответвлений должен уменьшаться примерно на один и тот же коэффициент от одного поколения к следующему. Если z представляет номер поколения, а d_z – средний диаметр поколения ответвлений z , то:

$$d_z = q * d_{z-1} d_0 \quad (1.1)$$

Вайбель и Гомес (Weibel and Gomez, 1962) оценили, что $q = 2^{-1/3}$, так что уравнение (1.1) может быть переписано как:

$$\bar{d}_z = d_0 * 2^{-z/3} \quad (1.2)$$

где d_0 = диаметр трахеи (главный отдел легкого)

Таким образом, эта модель имеет характерный масштабный коэффициент, $q=2^{-1/3}$. Каждое поколение ответвлений постепенно уменьшается, в соответствии с точным коэффициентом, аналогично тому, как уменьшалось предыдущее поколение. Это характерный масштаб.

Уравнение (1.1) может быть переписано в более общей форме:

$$d_{z, \alpha} = d_0 * e^{-\alpha * z} \quad (1.3)$$

где $\alpha = -\ln(q) > 0$

Как утверждают Уэст, Уэлмик и Гольдбергер (West, Valmik, Goldberger, 1986): "Таким образом, если единственный параметр α характеризует этот процесс, то $d(z, \alpha)$ интерпретируется как средний диаметр в поколении z для масштабного коэффициента α ". Отметьте экспоненциальную форму уравнения (1.3) с использованием характерного масштаба.

Тем не менее, моделирование легкого, основанное на характерном масштабе, игнорирует прочие свойства. В пределах каждого поколения фактические диаметры имеют диапазон: некоторые больше, а некоторые меньше среднего числа. Кроме того, экспоненциальный закон подобного преобразования соответствует только первым десяти поколениям ответвлений. Помимо этого, существует систематическое отклонение от характерной функции масштаба.

Рисунок 1.2 взят из работы Уэста и Гольдбергера (West and Goldberger, 1987). Если уравнение (1.3) остается в силе, то график диаметра в логарифмическом масштабе против номера поколения должен образовать прямую линию. Наклон этого графика в логарифмическом масштабе только по одной оси должен быть коэффициентом масштабирования. Мы можем видеть, что экспоненциальная особенность масштабирования не захватывает всю форму легкого. Однако график в логарифмическом масштабе по обеим осям (Рис. 1.3), использующий логарифм номера поколения, действительно приводит к волнистой линии, которая

Часть 1. Фрактальные временные ряды

отклоняется вправо. Но что означает график в логарифмическом масштабе по обеим осям?

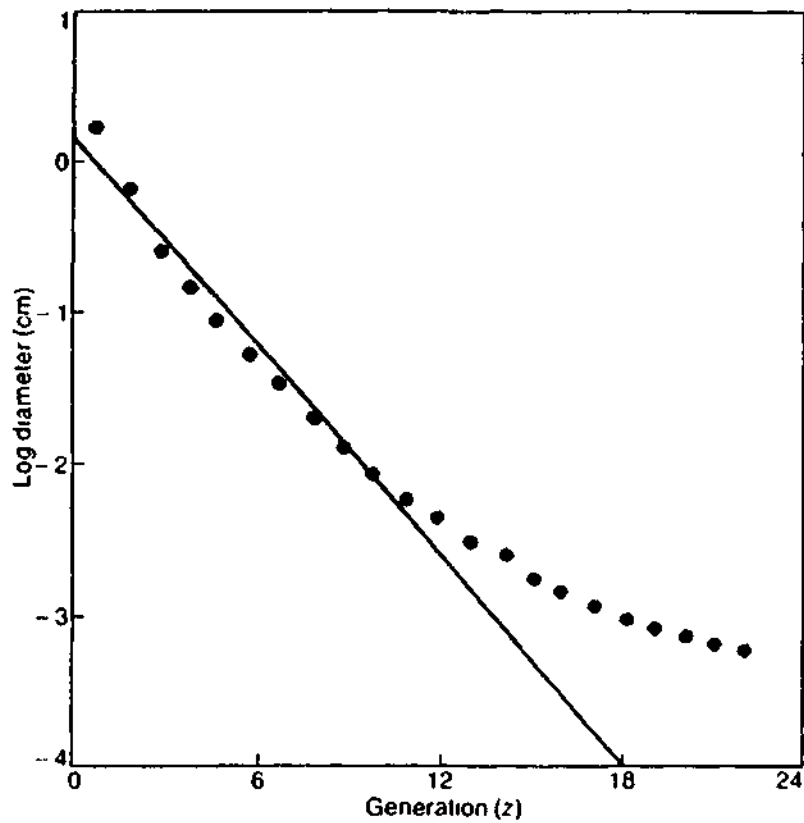


РИСУНОК 1.2 Легкое с экспоненциальным масштабированием. (Из работы Уэста и Гольдбергера (West and Goldberger, 1987).

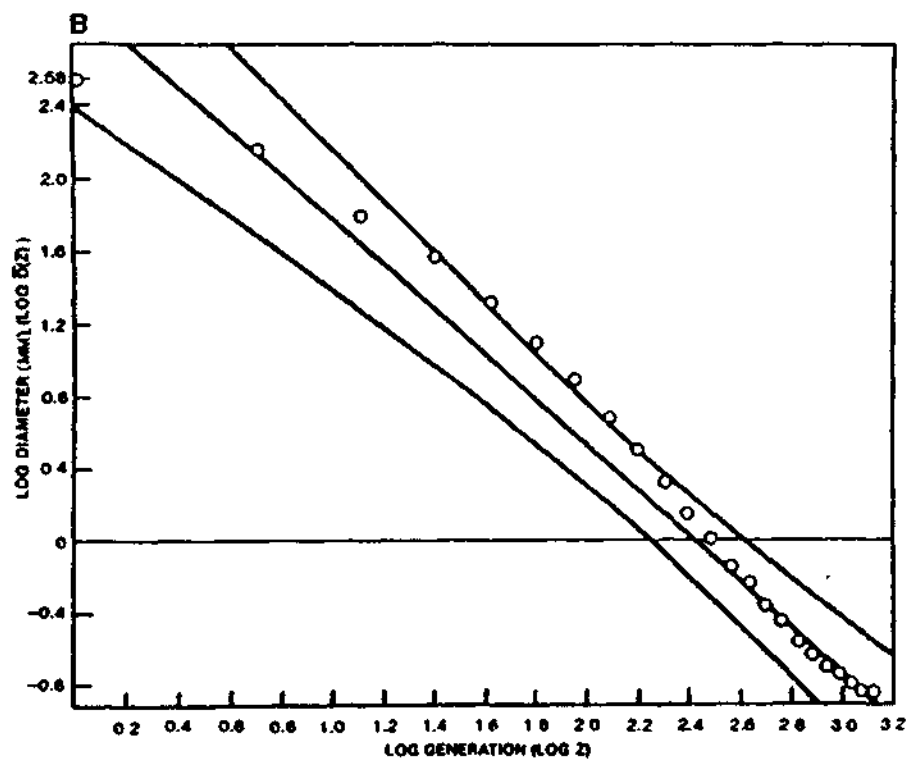


РИСУНОК 1.3 График в логарифмическом масштабе по обеим осям

Тот факт, что график в логарифмическом масштабе по одной оси не охватывает данные, означает, что экспоненциальная модель масштабирования не соответствует этой системе. Модель должна использовать степенную зависимость (вещественное число, возведенное в степень), а не экспоненциал (e , возведенное в степень). Эта особенность масштабирования по степенному закону, которая объясняет масштабную структуру легкого, оказывается вторым свойством фракталов, *фрактальной размерностью*, которая может описывать либо физическую структуру, такую как легкое, либо временной ряд.

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Для обсуждения фрактальной размерности мы должны вернуться к конфликту между Благом и Демиургом. Основное свойство евклидовой геометрии – это то, что размеры являются целыми числами. Линии одномерны. Плоскости двумерны. Тела трехмерны. Даже гиперизмерения, развитые в более поздние эры, обладают размерностью, выражаемой в целых числах. Например, пространственно-временной континуум Эйнштейна является четырехмерным, время является четвертым измерением. Евклидовы формы "совершенны", чего можно ожидать от Блага. Они гладкие, непрерывные, однородные и симметричные. Они также неадекватны для описания мира Демиурга, который они могут описывать только как общие упрощения.

Возьмите простой объект – полый пластмассовый мячик с отверстиями. Он не является трехмерным, потому что в нем есть отверстия. Он также не является двумерным, потому что он обладает глубиной. Несмотря на то, что он находится в трехмерном пространстве, он меньше чем тело, но больше чем плоскость. Его размерность находится где-то между двойкой и тройкой. Это нецелое число, фрактальная размерность.

Теперь рассмотрим математическую конструкцию подобную треугольнику Серпинского, который, несомненно, больше, чем линия, но меньше чем плоскость. В его пределах есть отверстия и промежутки, имеющие форму треугольников. Эти *разрывы* классифицируют треугольник Серпинского как потомка Демиурга, и, подобно полному пластмассовому мячику с отверстиями, его размерность представляет собой дробь.

Фрактальная размерность характеризует то, как предмет заполняет пространство. Кроме того, она описывает структуру предмета при изменении коэффициента увеличения или при изменении масштаба предмета. Для физических (или геометрических) фракталов такой закон подобного преобразования имеет место в пространстве. Фрактальный временной ряд изменяет масштаб статистически, во времени.

Фрактальная размерность временного ряда измеряет, насколько изрезанным является временной ряд. Согласно ожиданиям прямая линия должна иметь фрактальную размерность 1, равную ее евклидовой размерности. Фрактальная размерность случайного временного ряда составляет 1,50. Один ранний метод

Часть 1. Фрактальные временные ряды

вычисления фрактальной размерности предполагает покрытие кривой окружностями радиуса r . Мы рассчитываем количество окружностей необходимых для покрытия кривой, а затем увеличиваем радиус. При этом мы находим, что количество окружностей изменяется следующим образом:

$$N * (2*r)^d = 1 \quad (1.4)$$

где N = количество окружностей

r = радиус

d = фрактальная размерность

Поскольку линия изменяла бы масштаб согласно прямому линейному масштабу, ее фрактальная размерность была бы равна 1. Однако случайные блуждания имеют 50/50 шансов на повышение или падение; следовательно, ее фрактальная размерность составляет 1,50. Тем не менее, если фрактальная размерность находится между 1 и 1,50, временной ряд – больше чем линия и меньше чем случайное блуждание. Он более гладок, чем случайное блуждание, но более изрезан, чем линия. При использовании логарифмов уравнение (1.4) может быть преобразовано следующим образом:

$$d = \log(N) / \log\left(\frac{1}{2*r}\right) \quad (1.5)$$

Еще раз повторим, фрактальная размерность может быть решена как наклон графика в логарифмическом масштабе по обеим осям. Для временного ряда мы увеличили бы радиус как приращение времени и рассчитали бы количество окружностей необходимых для покрытия всего временного ряда в качестве функции приращения времени. Таким образом, фрактальная размерность временного ряда представляет собой функцию изменения масштаба во времени.

Метод подсчета окружностей достаточно утомителен и неточен для длинного временного ряда, даже когда он осуществляется компьютерами. В Главе 2 мы рассмотрим более точный метод, называемый методом нормированного размаха (R/S-анализом).

Фрактальная размерность временного ряда важна, потому что она признает, что процесс может быть где-то между детерминистическим (линия с фрактальной размерностью 1) и случайным (фрактальная размерность 1,50). Фактически, фрактальная размерность линии может находиться в пределах от 1 до 2. При значениях $1,50 < d < 2$ временной ряд более зазубрен, чем случайная последовательность, или имеет больше инверсий. Само собой разумеется, статистика временного ряда с фрактальными размерностями, отличными от 1,50, сильно отличалась бы от гауссовой статистики и не обязательно находилась бы в пределах нормального распределения.

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЫНКА

Данная книга имеет дело с этой проблемой, которая может быть вкратце

1. Введение во фрактальные временные ряды

описана как конфликт между случайностью и детерминизмом. С одной стороны, есть рыночные аналитики, которые чувствуют, что рынок совершенно детерминистичен; с другой стороны, есть группа тех, кто чувствует, что рынок полностью случаен. Мы увидим, что существует возможность того, что обе группы правы до некоторой степени. Но то, что получается из этих частичных истин, весьма отличается от результата, который ожидает любая из групп.

Мы будем использовать несколько различных видов анализа, но главное внимание этой книги направлено на R/S-анализ. R/S-анализ может различить фрактальные временные ряды от других типов временных рядов, раскрывая самоподобную статистическую структуру. Эта структура соответствует теории структуры рынка, названной гипотезой фрактального рынка, которая будет полностью описана в Главе 3. Также исследуются альтернативные объяснения фрактальной структуры, включая возможное объединение известного семейства ARCH-процессов (авторегрессионных условных гетероскедастических процессов) с фрактальными распределениями. Такое взаимодействие непосредственно связано с понятием локальной случайности и глобального детерминизма.

Сначала мы должны повторно исследовать, для целей сопоставления, существующую теорию рынка капитала (СМТ).

2

Несостоятельность гауссовой гипотезы

Когда ученые сталкиваются с многомерным процессом неизвестного происхождения, они часто выбирают независимый процесс типа броуновского движения в качестве рабочей гипотезы. Если анализ показывает, что сделать прогноз трудно, гипотеза принимается как истина. Турбулентность жидкости моделировалась таким образом в течение многих десятилетий. Вообще говоря, рынки продолжают моделироваться этим способом.

Броуновское движение имеет желательные характеристики для математика. Статистика может быть оценена с большой точностью, и могут быть рассчитаны вероятности. Однако использование традиционной статистики для моделирования рынков предполагает, что они подобны азартным играм. Каждый результат независим от предыдущих результатов. Инвестирование в ценные бумаги приравнивается к азартной игре.

В большинстве азартных игр для того, чтобы сделать результат случайным, используется много степеней свободы. В рулетке вращение колеса в одном направлении и выбрасывание шарика в противоположном направлении пускает в ход ряд неповторяющихся элементов: скорость колеса при выбрасывании шарика, начальная скорость шарика, точка выброса на колесо и, наконец, угол выброса шарика. Если вы думаете, что было бы возможно дублировать условия отдельной игры, вы ошибаетесь. Нелинейность снижения шарика по спирали усилилась бы в короткое время и привела бы к совершенно другой цифре приземления на рулетке. Результатом является система с ограниченным числом степеней свободы, но со свойственной непредсказуемостью. Каждый результат, однако, независим от предыдущего.

Перетасованная колода карт часто используется как образцовая случайная система. Большинство игр в карты требует навыка в принятии решений, но каждая сыгранная партия не зависит от предыдущей. "Удачная серия" является просто иллюзией, или попыткой игрока придать упорядоченность случайному процессу.

Исключение составляет игра "блэк джек" или "21". Связанные с ней примеры включают баккару и шмен-де-фер, любимые игры европейских казино и энтузиастов Джеймса Бонда. В блэк джеке каждому игроку раздаются две карты. Цель состоит в том, чтобы набрать 21 очко или меньше (карты с картинками имеют по 10 очков). Игрок может просить дополнительные карты. Первоначально одна колода разыгрывалась до тех пор, пока все карты не были розданы, после чего колода перетасовывалась.

Эдвард Торп, математик, понял, что колода карт, используемая таким образом, имела "память"; то есть результат текущей партии зависел от предыдущих партий,

2. Несостоятельность гауссовой гипотезы

потому что карты, участвовавшие в предыдущих партиях, ушли из системы. Отслеживая использованные карты, он мог оценить вероятности перемещения по мере продвижения игры и держал пари на самые благоприятные партии. Казино отреагировало на обнаружение такой "статистической памяти" использованием многочисленных колод при игре в баккару и шмен-де-фер, устраняя, таким образом, память.

Эти два примера "азартных игр" показывают, что не все азартные игры обязательно управляются гауссовой статистикой. Есть непредсказуемые системы с ограниченным числом степеней свободы. Кроме того, могут иметь место процессы, которые обладают долговременной памятью, даже если они являются вероятностными в краткосрочной перспективе.

Несмотря на эти исключения, установившейся практикой является формулирование всех вероятностей в гауссовых терминах. Платон говорил, что наш мир не является реальным миром, потому что он не соответствует евклидовой геометрии. Мы говорим, что все непредсказуемые системы должны быть гауссовыми или независимыми процессами. Несмотря на то, что со времен Платона прошло почти 2 500 лет, наша способность вводить самих себя в заблуждение не уменьшилась.

ТЕОРИЯ РЫНКА КАПИТАЛА

Традиционная теория рынка капитала (СМТ) в значительной степени базировалась на справедливых азартных играх или "мартиналах". Мнение о том, что игра на бирже может быть смоделирована вероятностями, берет свое начало у Башелье (Bachelier, 1900) и продолжает использоваться до настоящего времени. В моей более ранней книге (Peters, 1991a) подробно рассматривалось развитие СМТ и ее постоянная зависимость от статистических критериев, таких как стандартное отклонение, в качестве показателей риска. В этом разделе мы не будем чрезмерно повторять эти аргументы, но вместо этого будут обсуждаться некоторые лежащие в их основе логические обоснования для продолжения использования гауссовой статистики для моделирования цен активов.

Долгое время существовала традиция рассматривать курсы ценных бумаг и их соответственные прибыли с точки зрения спекулянта – способность индивидуума получить прибыль от ценной бумаги путем предугадывания ее будущей стоимости до того, как это сделают другие спекулянты. Таким образом, биржевой игрок держит пари, что текущая цена ценной бумаги выше/ниже ее будущей стоимости и, соответственно, продает/покупает ее по текущей цене. Биржевая игра предполагает заключение пари, что делает инвестиции одной из форм азартной игры. (Действительно, теория вероятности развилась как прямой результат развития азартных игр с использованием "костей", ранней формы игральных кубиков). "Теория спекуляции" Башелье (1900) как раз это и рассматривает. Лорд Кейнс (Lord Keynes) продолжил развитие этой точки зрения своим известным комментарием, что рынками движут "животные порывы". Позже Нобелевский лауреат Гарри Марковиц (Harry Markowitz) (1952, 1959) использовал колеса фортуны для объяснения своей аудитории стандартного отклонения. Он сделал это, чтобы представить свое понимание того, что

Часть 1. Фрактальные временные ряды

стандартное отклонение – это мера риска, и ковариация прибылей могла бы использоваться для объяснения того, как диверсификация (группирование некоррелированных или отрицательно коррелированных акций) уменьшает риск (стандартное отклонение портфеля).

Приравнивание инвестиций к биржевой игре продолжилось моделью опционного ценообразования Блэка-Шоулса и другими теориями на основе равновесия. Теории биржевой игры, включая современную теорию портфеля (Modern Portfolio Theory – MPT), не проводили различия между краткосрочными биржевыми спекулянтами и долгосрочными инвесторами. А почему?

Предполагалось, что рынки "эффективны"; то есть цены уже отражали всю текущую информацию, которая могла предвосхитить будущие события. Поэтому мог быть смоделирован только спекулятивный, стохастический компонент; изменение цен, вызванное изменениями стоимости, не могло быть смоделировано. Если рыночные прибыли являются нормально распределенным "белым" шумом, то они одинаковы на всех инвестиционных горизонтах. Это эквивалентно "шипению" магнитофона. Звук одинаков независимо от скорости магнитофонной ленты.

Нам осталась теория, которая предполагала дифференцирующие особенности многих инвесторов, торгующих на многих инвестиционных горизонтах. Риски каждого из них одинаковы. Риск и прибыль растут с соответствующей скоростью с течением времени. У долгосрочных инвесторов нет никаких преимуществ. Кроме того, изменения цен определяются, прежде всего, биржевыми спекулянтами. По смыслу, прогнозирование изменений экономической стоимости не был бы полезно спекулянтам.

Такое разъединение изменений стоимости ценной бумаги, лежащей в основе экономики, и приписывание изменения цен, главным образом, биржевым спекулянтам укрепило восприятие того, что инвестиции и азартные игры являются эквивалентными, независимо от инвестиционного горизонта. Эта позиция яснее всего проявляется в установившейся практике актуариев моделировать обязательства пенсионных фондов посредством экстраполяции краткосрочных прибылей (поступлений за год) и риска (стандартного отклонения ежемесячных прибылей) на 30-летний горизонт. Это также отражено в тенденции индивидуумов и средств информации сосредотачиваться на краткосрочных трендах и стоимостях.

Если на рынках не происходит случайное блуждание, возможно, что мы преувеличиваем или преуменьшаем наш возможный риск и прибыль от инвестиций в сравнении с биржевой игрой. В следующем разделе мы рассмотрим статистические характеристики рынков более подробно.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЫНКОВ

В общем, статистический анализ требует нормального распределения или известной колоколообразной кривой. Известно, что рыночные прибыли не подвержены нормальному распределению, но эта информация была сглажена или рационализирована за многие годы, чтобы сохранить критическое предположение о том, что рыночные прибыли следуют модели случайных блужданий.

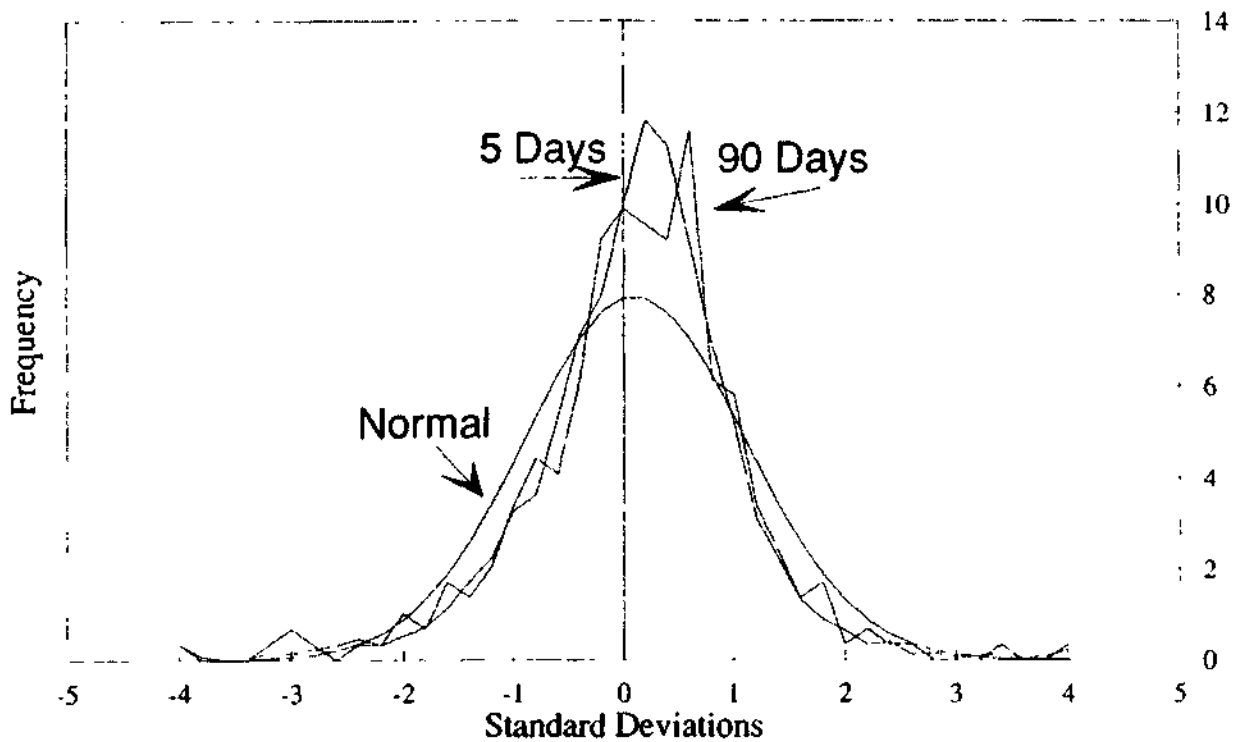


РИСУНОК 2.1 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, частотное распределение прибылей: 1888-1991 гг.

Рисунок 2.1 показывает частотное распределение 5-дневных и 90-дневных прибылей по индексу Доу-Джонса для акций промышленных предприятий со 2 января 1888 г. по 31 декабря 1991 г., то есть приблизительно за 103 года. Для сравнения также показано нормальное распределение. Оба распределения прибылей характеризуются высоким пиком в среднем значении и более толстыми хвостами, чем в нормальном распределении, и, кроме того, два распределения по индексу Доу-Джонса фактически имеют одну и ту же форму. Петля, идущая вверх в четырех стандартных отклонениях, – это сумма, которая больше чем (меньше чем) четыре (-4) стандартных отклонения выше (ниже) среднего значения. Рисунок 2.2 показывает полную вероятность, содержащуюся в пределах интервалов стандартного отклонения для двух инвестиционных горизонтов по индексу Доу-Джонса.

Опять мы видим, что два распределения очень похожи и не являются "нормальными". Рисунок 2.3 показывает разницу между распределением 5-дневной прибыли и нормальным распределением. Хвосты не только толще, чем при нормальном распределении, они – *однородно* толще. Вплоть до четырех стандартных отклонений от среднего значения мы имеем столько же наблюдений, сколько мы имели за два стандартных отклонения от среднего значения. Даже при четырех сигмах хвосты не сходятся к нулю.

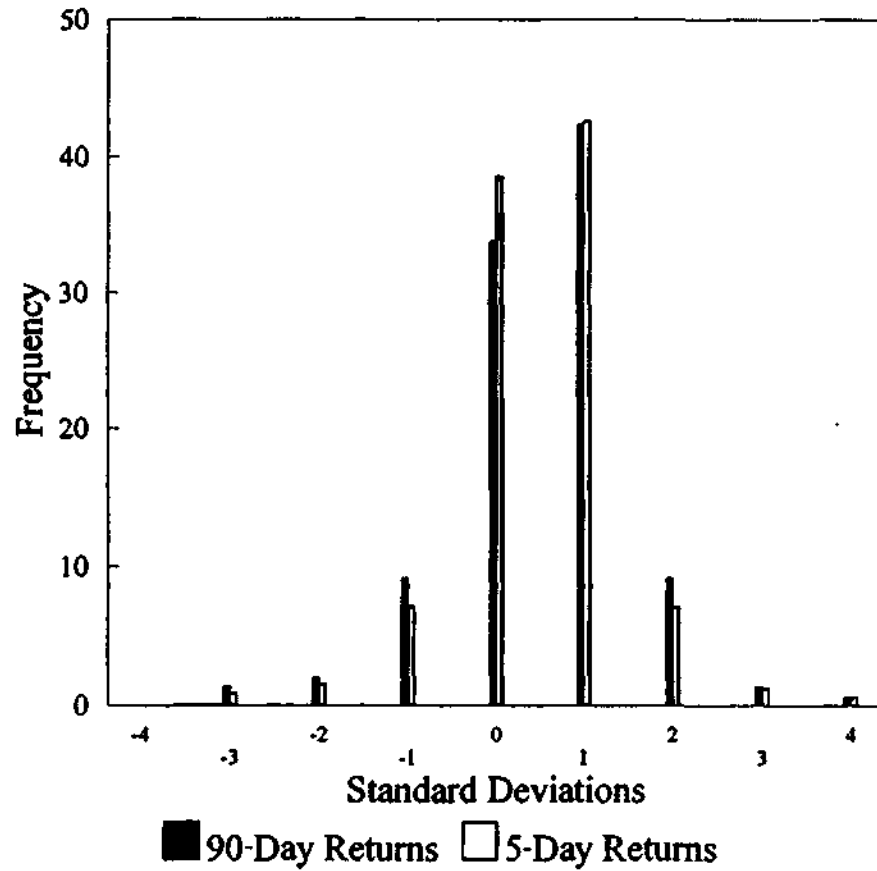


РИСУНОК 2.2 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, частота в пределах интервалов.

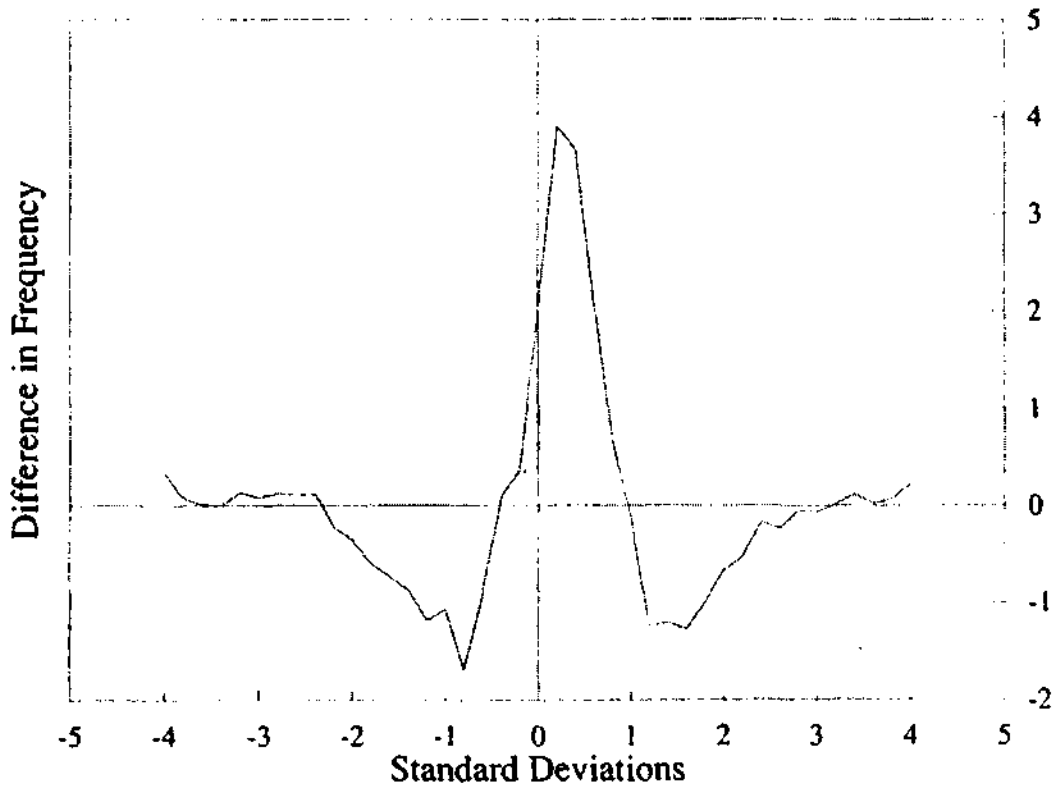


РИСУНОК 2.3 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 5-дневные прибыли – (минус) нормальная частота.

2. Несостоятельность гауссовой гипотезы

Рисунок 2.4 показывает схожие кривые различий для (а) 1-дневных, (б) 10-дневных, (с) 20-дневных, (д) 30-дневных и (е) 90-дневных прибылей. Во всех случаях хвосты толще, а пики выше, чем при нормальном распределении. Фактически, они все выглядят подобными друг другу.

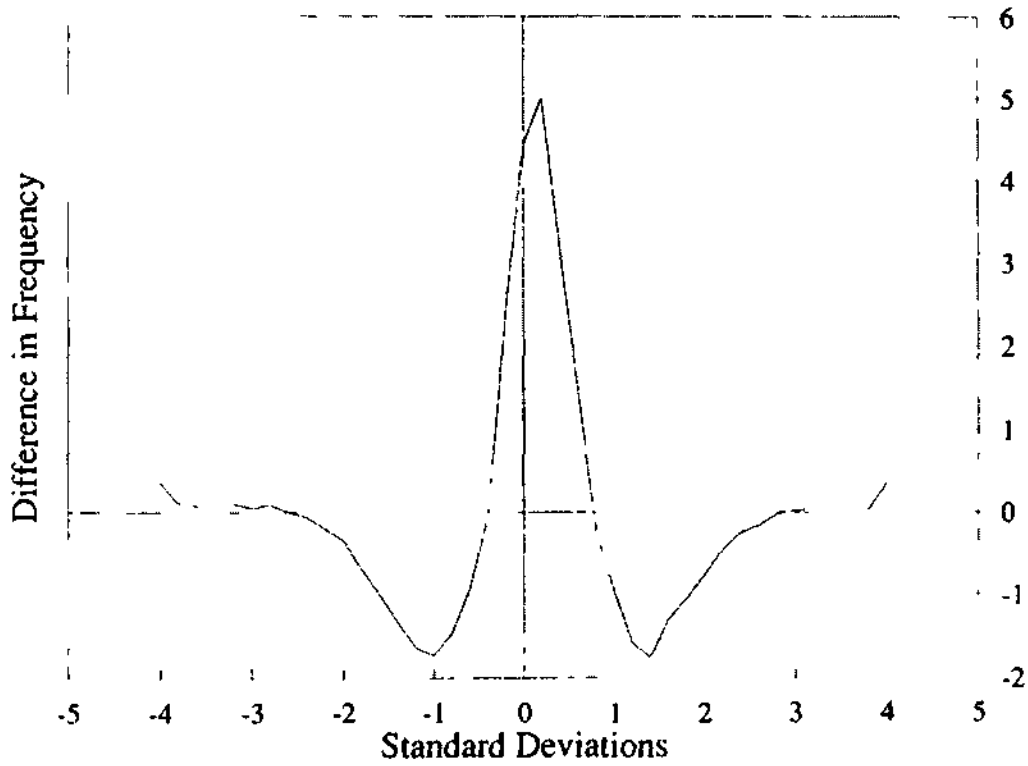


РИСУНОК 2.4а Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, однодневные прибыли – нормальная частота.

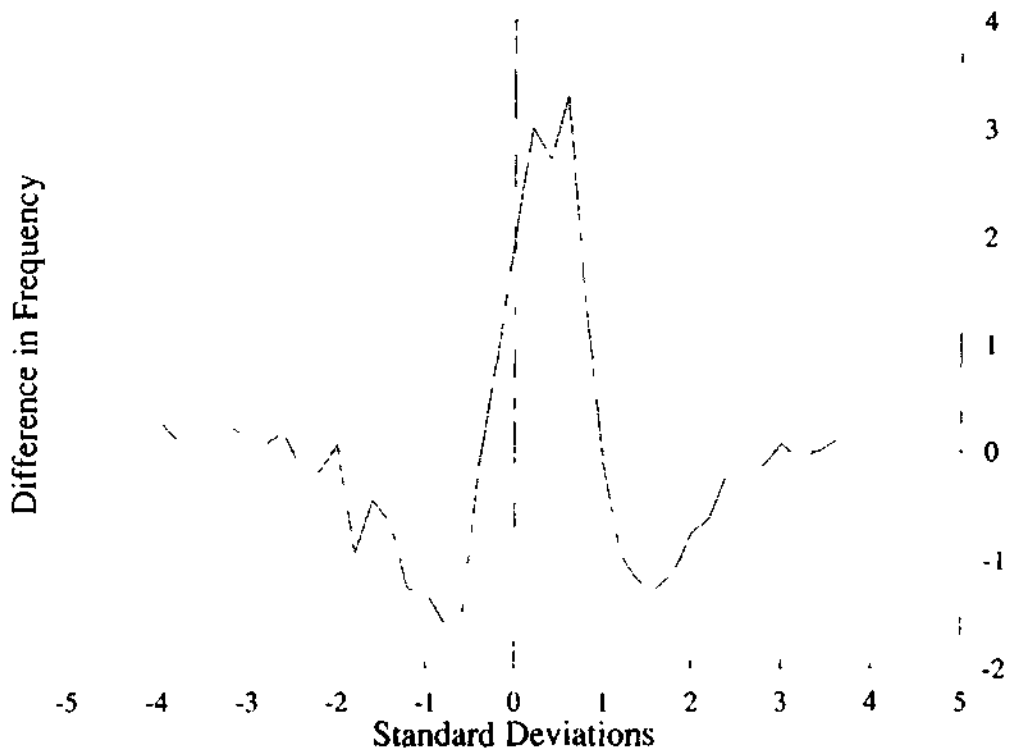


РИСУНОК 2.4б Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 10-дневные прибыли – нормальная частота.

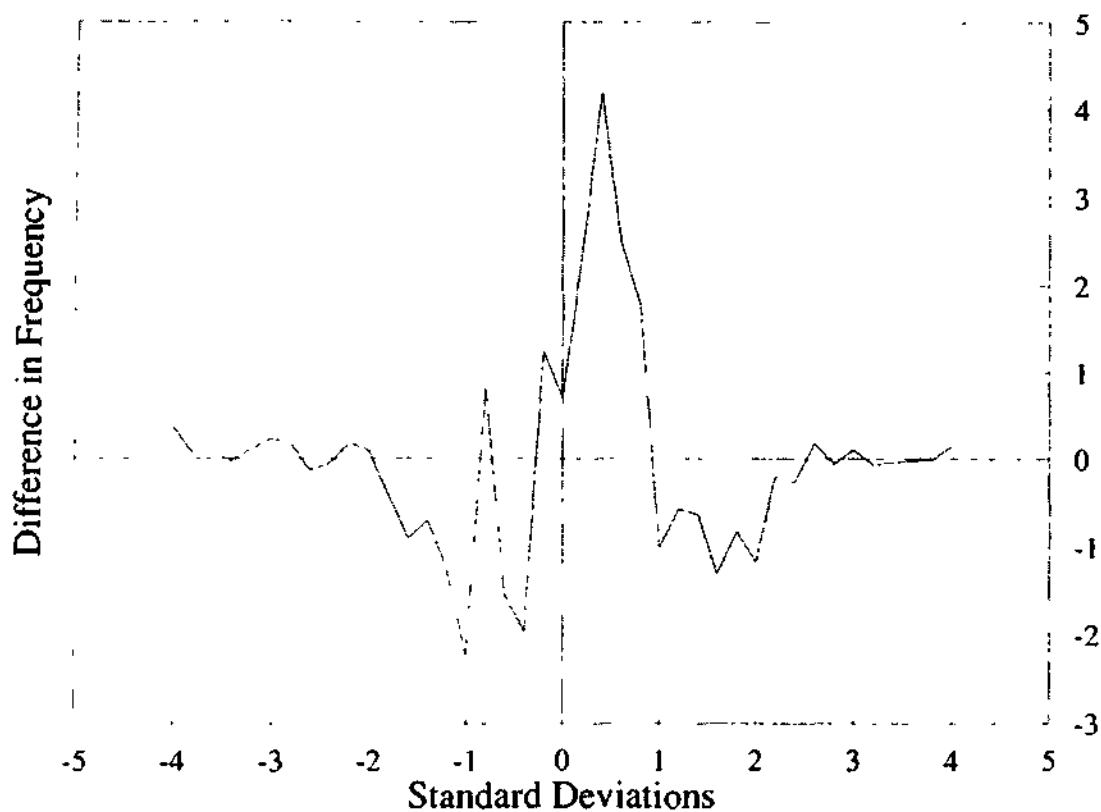


РИСУНОК 2.4с Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 20-дневные прибыли – нормальная частота.

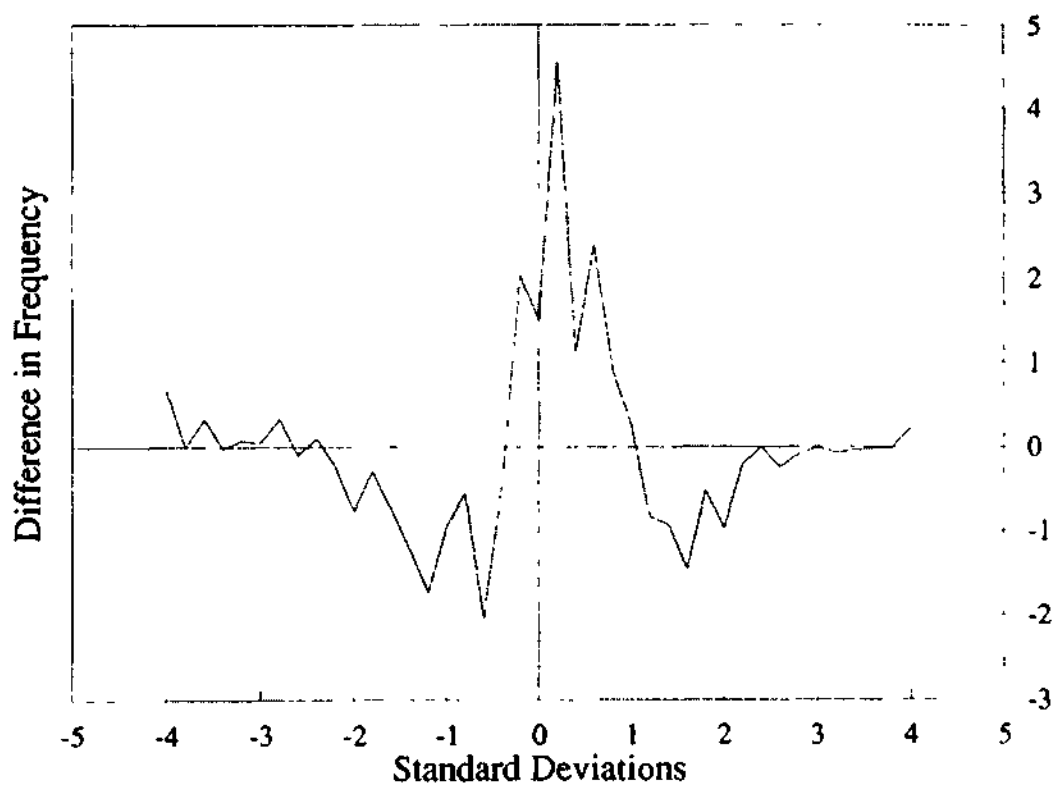


РИСУНОК 2.4d Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 30-дневные прибыли – нормальная частота.

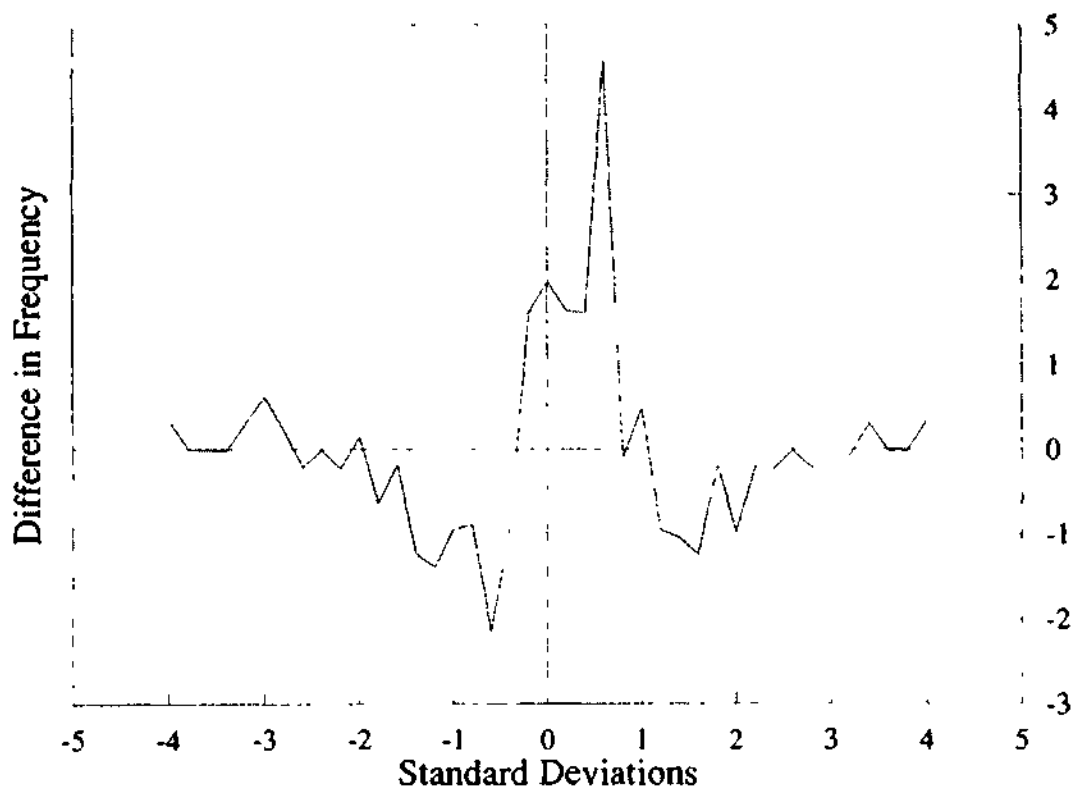


РИСУНОК 2.4e Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 90-дневные прибыли – нормальная частота.

Что это означает? Риск наступления большого события намного более высок, чем подразумевает нормальное распределение. Нормальное распределение говорит, что вероятность наступления события более трех стандартных отклонений составляет 0,5 процента или 5 на 1 000. И все же, рисунок 2.2 показывает, что фактическая вероятность составляет 2,4 процента или 24 на 1 000. Таким образом, вероятность большого события почти в пять раз больше, чем подразумевает нормальное распределение. Поскольку мы измеряем еще большие события, разрыв между теорией и действительностью становится еще более явным. Вероятность события четырех стандартных отклонений фактически составляет 1 процент, а не 0,01 процента, т.е. она в 100 раз больше. Кроме того, подобный риск фактически идентичен для всех инвестиционных горизонтов, показанных здесь. Следовательно, однодневные трейдеры сталкиваются с тем же количеством событий шесть-сигма в своих временных рамках, с каким сталкиваются 90-дневные инвесторы в своих временных рамках. Такое статистическое самоподобие, которое должно быть знакомо тем, кто читал Главу 1, будет подробно обсуждаться в Главе 7.

Рисунки 2.5 и 2.6 показывают подобные распределения для валютного курса иена/доллар (1971-1990 гг.) и 20-летних доходов по американским казначейским облигациям (1979-1992 гг.) соответственно. Толстые хвосты – не только явление фондового рынка. Другие рынки капитала показывают схожие характеристики. Такие распределения с толстыми хвостами часто являются доказательством системы с долговременной памятью, произведенной нелинейным стохастическим процессом.

Часть 1. Фрактальные временные ряды

Такой нелинейный процесс может быть вызван зависящей от времени дисперсией (ARCH) или процессом с долговременной памятью, называемым процессом "Парето-Леви". В свое время мы обсудим оба случая. В данный момент мы можем просто сказать, что распределения с толстыми хвостами часто являются симптомами нелинейного стохастического процесса.

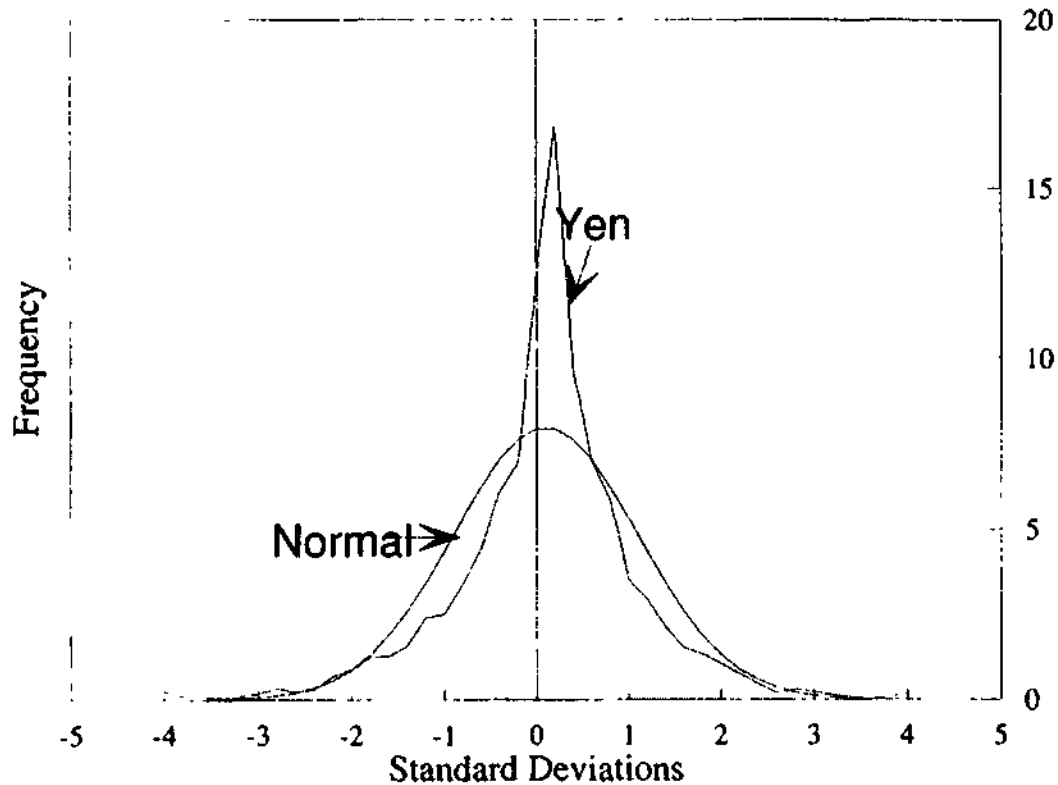


РИСУНОК 2.5 Валютный курс иена/доллар, частотное распределение прибылей: 1971-1990 гг.

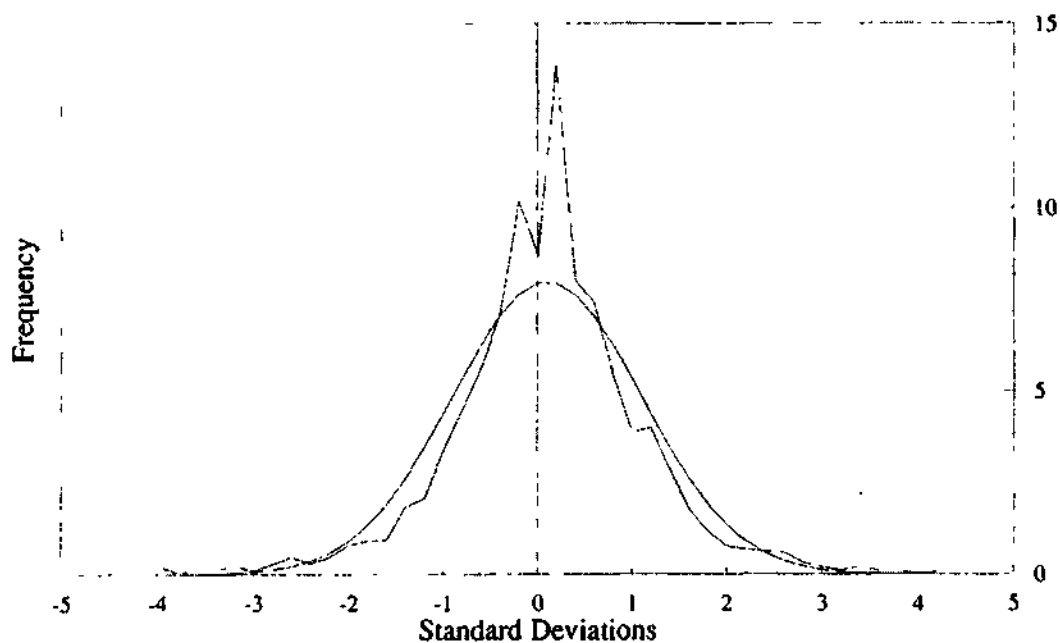


РИСУНОК 2.6 Двадцатилетние доходы американских казначейских облигаций, частотное распределение прибылей: 1979-1992 гг.

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Другое основное предположение, которое необходимо для применения нормального распределения, затрагивает временную структуру волатильности. Как правило, мы используем стандартное отклонение для измерения волатильности и предполагаем, что она подвергается масштабированию согласно квадратному корню из времени. Например, мы "пересчитываем на год" стандартное отклонение ежемесячных прибылей посредством умножения его на квадратный корень из 12. Эта практика происходит из наблюдения Эйнштейна (Einstein, 1905), что *расстояние*, которое проходит частица в броуновском движении, увеличивается с квадратным корнем из времени, затраченного на его измерение.

Тем не менее, несмотря на этот широко распространенный метод для "пересчета риска на год", известно, что стандартное отклонение подвергается масштабированию в более быстром темпе, чем квадратный корень из времени. Эмпирические исследования Тернера и Вайгеля (Turner and Weigel, 1990), Шиллера (Shiller, 1989) и Петерса (Peters, 1991b) подтверждают такой темп масштабирования. Для объяснения этого свойства, идущего вразрез с теорией случайных блужданий и гипотезой эффективного рынка (EMH), были исследованы запаздывающий белый шум, возмущения ARCH и другие причины.

Акции

Временная структура волатильности оказалась даже более странной, чем думали эти исследователи. Рисунок 2.7 – график логарифма стандартного отклонения против логарифма времени относительно 103-летних данных ежедневного индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний. Эта диаграмма была построена посредством равномерного деления полного 103-летнего периода на все подынтервалы, которые включали и начальные, и конечные точки. Поскольку число используемых подпериодов зависит от общего количества точек, был использован интервал в 25 000 дней. Были рассчитаны прибыли для смежных периодов, а также были рассчитаны стандартные отклонения этих прибылей. Результаты приведены в Таблице 2.1. Таким образом, мы имеем подпериоды в пределах от 25 000 однодневных прибылей до четырех 6.250-дневных прибылей, или приблизительно 28 лет.

Квадратный корень из времени показан сплошной 45-градусной линией на рисунке 2.7. Волатильность действительно увеличивается более быстрым темпом, чем квадратный корень из времени. В Таблице 2.2 вначале показан результат регрессии до 1 000 дней ($N \leq 1\,000$ дней). До этой точки стандартное отклонение растет на 0,53 корня из времени. По сравнению с результатами регрессии после 1 000 дней ($N \geq 1\,000$ дней) наклон сильно упал к 0,25. Если мы думаем о риске как о стандартном отклонении, инвесторы несут больше риска, чем подразумевается стандартным отклонением для инвестиционных горизонтов менее четырех лет. Однако инвесторы несут все меньше риска на инвестиционных горизонтах более четырех лет. Как всегда было известно, долгосрочные инвесторы несут меньше риска, чем краткосрочные инвесторы.

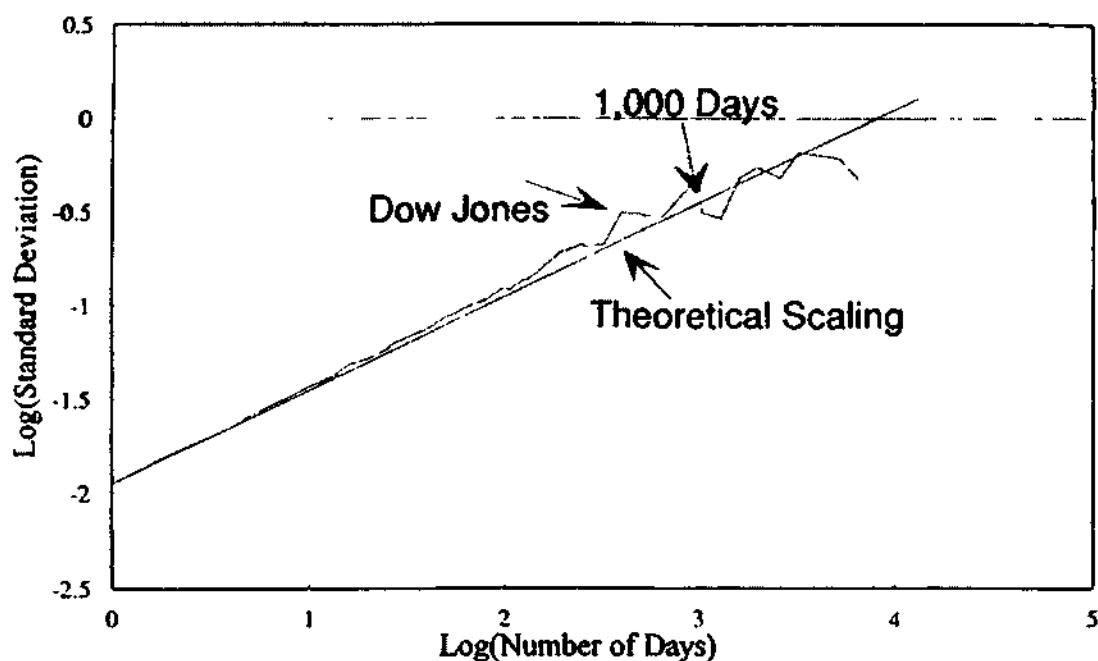


РИСУНОК 2.7 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, временная структура волатильности: 1888-1990 гг.

Другой подход состоит в том, чтобы исследовать отношение прибыли к риску или "коэффициент Шарпа", названный по имени его создателя, Нобелевского Лауреата Уильяма Шарпа. Коэффициент Шарпа показывает, сколько прибыли получено на единицу риска, или стандартного отклонения. (См. Таблицу 2.3.) В течение периодов меньше 1 000 дней или четырех лет коэффициент Шарпа постоянно уменьшается; на отметке в 1 200 дней он резко увеличивается. Это означает, что долгосрочные инвесторы вознаграждены больше, на единицу риска, чем краткосрочные инвесторы.

Статистически говоря, временная структура волатильности показывает, что фондовый рынок не является случайным блужданием. В лучшем случае он является стохастическим "ограниченным" множеством. Это означает, что есть пределы тому, как далеко случайный ходок пройдет, прежде чем он или она направятся обратно к дому.

Самое популярное объяснение ограниченности заключается в том, что прибыли являются возвратными к среднему. Стохастический процесс, возвратный к среднему, может произвести ограниченное множество, но не увеличивающийся коэффициент Шарпа. Возвратный к среднему процесс подразумевает игру с нулевой суммой. Исключительно высокие доходы в одном периоде нейтрализуются доходами ниже среднего в более позднем периоде. Коэффициент Шарпа остался бы постоянным, потому что прибыли также были бы ограничены. Таким образом, средняя реверсия в прибылях не является полностью удовлетворительным объяснением ограниченности изменчивости. Независимо от этого процесс, который производит наблюдаемую временную структуру волатильности, явно не гауссов, при этом он недостаточно хорошо описывается нормальным распределением.

2. Несостоятельность гауссовой гипотезы

Таблица 2.1 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, временная структура волатильности: 1888-1990 гг.

Количество дней	Стандартное отклонение	Количество дней	Стандартное отклонение
1	0,011176	130	0,135876
2	0,016265	200	0,196948
4	0,022354	208	0,196882
5	0,025838	250	0,213792
8	0,032904	260	0,20688
10	0,037065	325	0,213301
13	0,041749	400	0,314616
16	0,048712	500	0,309865
20	0,052278	520	0,301762
25	0,058831	650	0,298672
26	0,061999	1000	0,493198
40	0,075393	1040	0,314733
50	0,087089	1300	0,293109
52	0,087857	1625	0,482494
65	0,0989	2000	0,548611
80	0,107542	2600	0,479879
100	0,125939	3250	0,660229
104	0,120654	5200	0,612204
125	0,137525	6500	0,475797

Таблица 2.2 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, результаты регрессии, временная структура волатильности: 1888-1990 гг.

	N ≤ 1 000 дней	N ≥ 1 000 дней
Выход регрессии:		
Константа	-1,96757	-1,47897
Стандартная ошибка		
Y (расчетная)	0,026881	0,10798
R в квадрате	0,996032	0,612613
Количество наблюдений	30	10
Степени свободы	28	8
X коэффициент(ы)	0,534713	0,347383
Стандартная ошибка		
коэффициента	0,006378	0,097666

Часть 1. Фрактальные временные ряды

Таблица 2.3 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний: 1888-1990 гг.

Количество дней	Коэффициент Шарпа	Количество дней	Коэффициент Шарпа
1	1,28959	130	1,13416
2	1,217665	200	0,830513
4	1,289289	208	0,864306
5	1,206357	250	0,881
8	1,190143	260	0,978488
10	1,172428	325	1,150581
13	1,201372	400	0,650904
16	1,086107	500	0,838771
20	1,178697	520	0,919799
25	1,163449	650	1,173662
26	1,0895	1000	0,66218
40	1,133486	1040	1,691087
50	1,061851	1300	2,437258
52	1,085109	1625	1,124315
65	1,070387	2000	1,070333
80	1,114178	2600	1,818561
100	1,015541	3250	1,200915
104	1,150716	5200	2,234748
125	1,064553	6500	4,62474

Наконец, мы можем видеть, что краткосрочные инвесторы сталкиваются с рисками, отличными от рисков долгосрочных инвесторов в отношении американских акций. Термин "краткосрочный" теперь означает инвестиционные горизонты менее четырех лет. На этом уровне мы видели, что частотное распределение прибылей самоподобно до 90 дней. Мы можем размышлять, что эта самоподобная статистическая структура продолжится до, приблизительно, четырехлетних горизонтов, хотя нас всех уже давно не будет, прежде чем мы сможем получить достаточное количество эмпирических доказательств. В течение более длинного срока происходит нечто иное. Разница в стандартном отклонении между долгим сроком и кратким сроком влияет на то, как мы анализируем рынки. Инструменты, которые мы используем, зависят от нашего инвестиционного горизонта. Это, конечно, относится к акциям, но как насчет других рынков?

Облигации

Несмотря на факт, что американский рынок облигаций является большим и глубоким, на нем отсутствует "высокочастотная" информация; то есть торговую информацию трудно получить чаще, чем ежемесячно. Облигации продаются без посредников, и не существует биржи для ведения учета торгов. Самым длинным

2. Несостоятельность гауссовой гипотезы

временным рядом, который я мог получить, был ряд с ежедневными 20-летними доходами по казначейским облигациям, поддерживаемым Федеральным правительством с 1 января 1979 г. по 30 сентября 1992 г., то есть всего 14 лет данных. (См. рисунок 2.8.) Однако мы можем видеть – менее убедительно – временную структуру волатильности облигаций, которая подобна той, что мы видели для акций. Таблица 2.4 суммирует результаты.

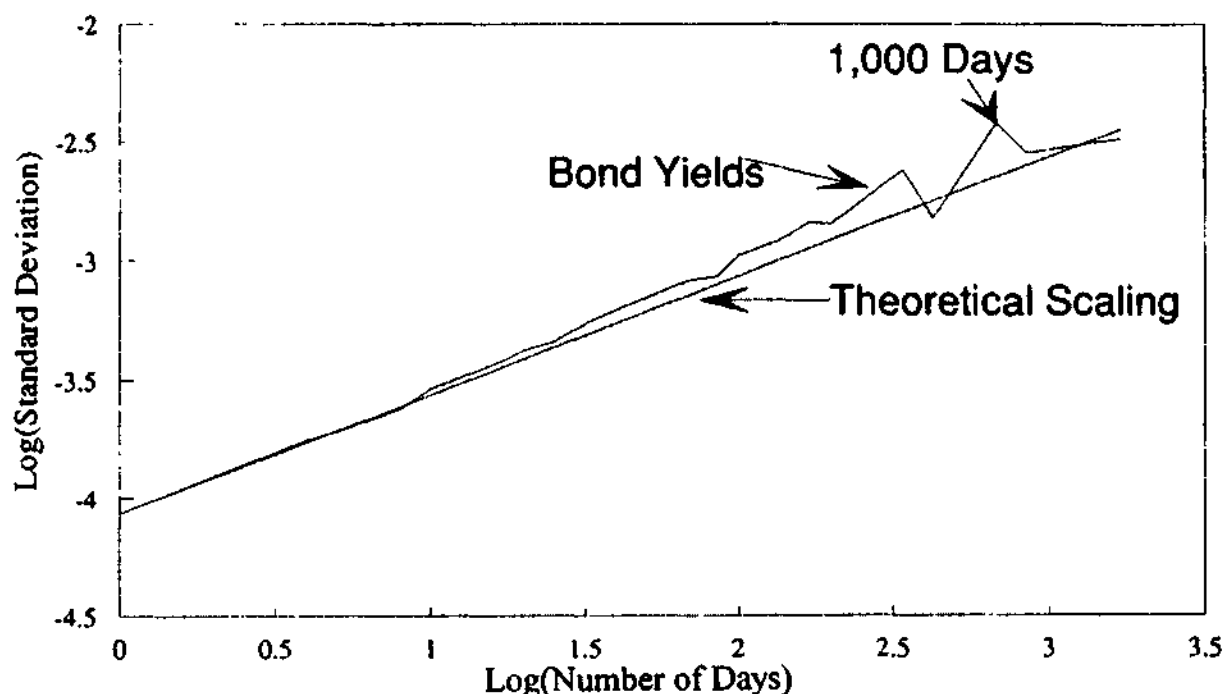


РИСУНОК 2.8 Ежедневные доходы по облигациям, временная структура волатильности: 1 января 1979 г. – 30 сентября 1992 г.

Таблица 2.4 Долгосрочные казначейские облигации, временная структура волатильности: 1 января 1978 г. – 30 июня 1990 г.

	$N \leq 1000$ дней	$N \geq 1000$ дней
Выход регрессии:		
Константа	-4,0891	-2,26015
Стандартная ошибка		
Y (расчетная)	0,053874	0,085519
R в квадрате	0,985035	0,062858
Количество наблюдений	21	3
Степени свободы	19	1
X коэффициент(ы)	0,548102	-0,07547
Стандартная ошибка коэффициента	0,015499	0,29141

Валюта

В отношении валюты мы сталкиваемся со схожими проблемами данных. До вступления в силу Бреттонвудского соглашения 1972 г. валютные курсы не плавали; они были зафиксированы соответствующими правительствами. Начиная с 1973 г., однако, мы имеем множество информации относительно многих различных, активно торгуемых валютных курсах.

На рисунке 2.5 мы видели, что валютный курс иена/доллар имел знакомое нам теперь распределение с толстыми хвостами. Рисунки 2.9(a) – (c) показывают схожие частотные распределения для валютных курсов марка/доллар, фунт/доллар и иена/фунт. Во всех случаях мы имеем распределение схожей формы. Фактически, частотное распределение валютных прибылей имеет более высокие пики и более толстые хвосты, чем американские акции или облигации. Рисунки 2.10(a) – (c) показывают временную структуру волатильности для трех обменных курсов, а в Таблице 2.5 приведены результаты регрессии в двойном логарифмическом масштабе. Во всех случаях наклон – и, следовательно, масштабирование стандартного отклонения – увеличивается более быстрым темпом, чем американские акции или облигации, и *они не являются ограниченными*.

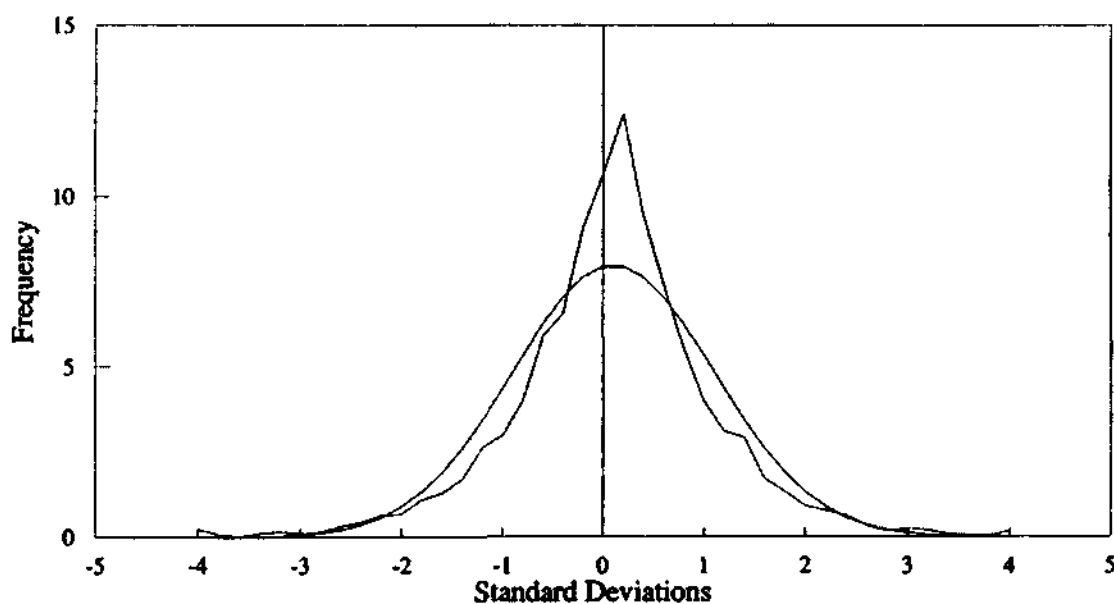


РИСУНОК 2.9а Марка/доллар, частотное распределение прибыли.

Чтобы исследовать, остаются ли американские акции ограниченным множеством за этот период, мы проверяем временную структуру волатильности на рисунке 2.7. Она остается ограниченной. Эти результаты включены в Таблицу 2.5. Следовательно, либо валюта имеет более длинный "ограниченный" интервал, чем акции, либо она не имеет никаких ограничений. Последнее подразумевало бы, что валютный риск растет более быстрым темпом, чем нормальное распределение, но никогда не прекращает расти. Следовательно, перед долгосрочными держателями валюты стоят постоянно возрастающие уровни риска по мере расширения их инвестиционного горизонта. В отличие от акций и облигаций валюта не предлагает

2. Несостоятельность гауссовой гипотезы

никакого инвестиционного стимула для стратегии покупки и владения в течение длительного времени.

В краткосрочной перспективе спекулянты на акциях, облигациях и на курсах валют сталкиваются со схожими рисками, но в долгосрочной перспективе риск инвесторов, вкладывающих капитал в акции и облигации, снижен.

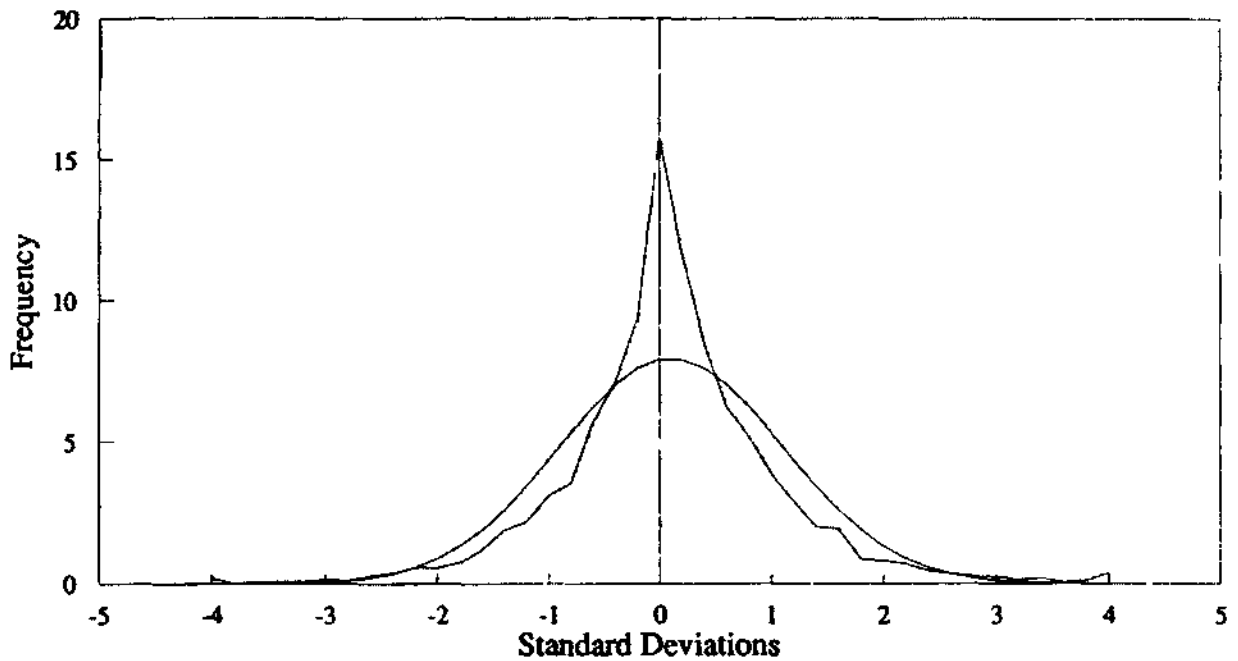


РИСУНОК 2.9b Фунт/доллар, частотное распределение прибыли.

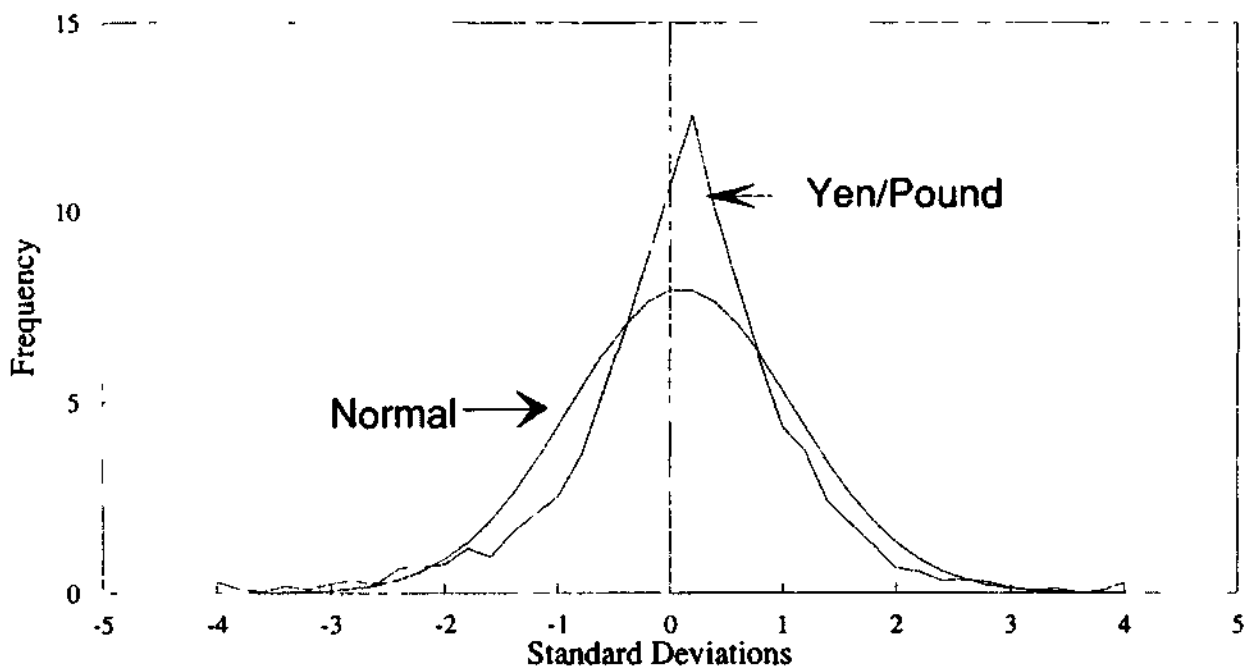


РИСУНОК 2.9с Иена/фунт, частотное распределение прибыли.

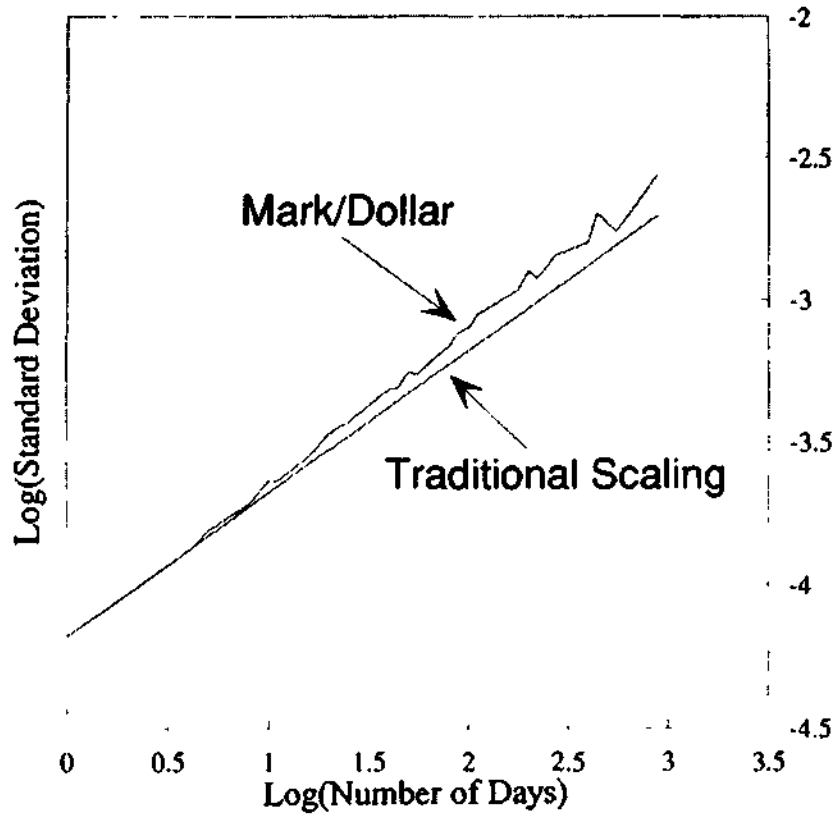


РИСУНОК 2.10а Обменный курс марка/доллар, временная структура волатильности.

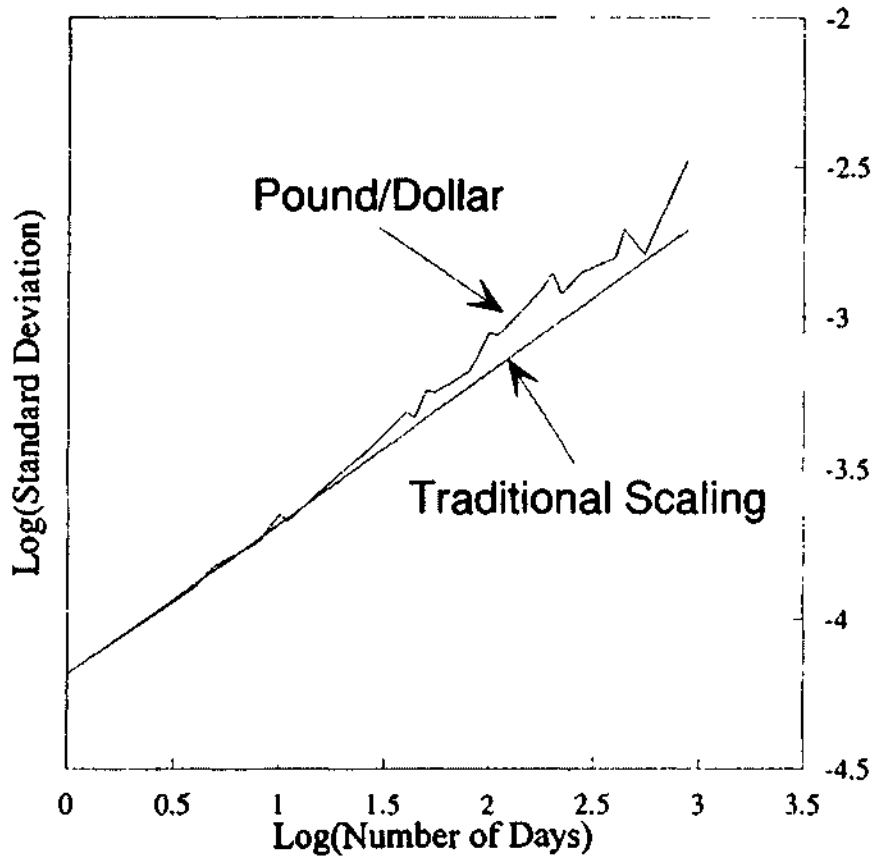


РИСУНОК 2.10б Обменный курс фунт/доллар, временная структура волатильности.

2. Несостоятельность гауссовой гипотезы

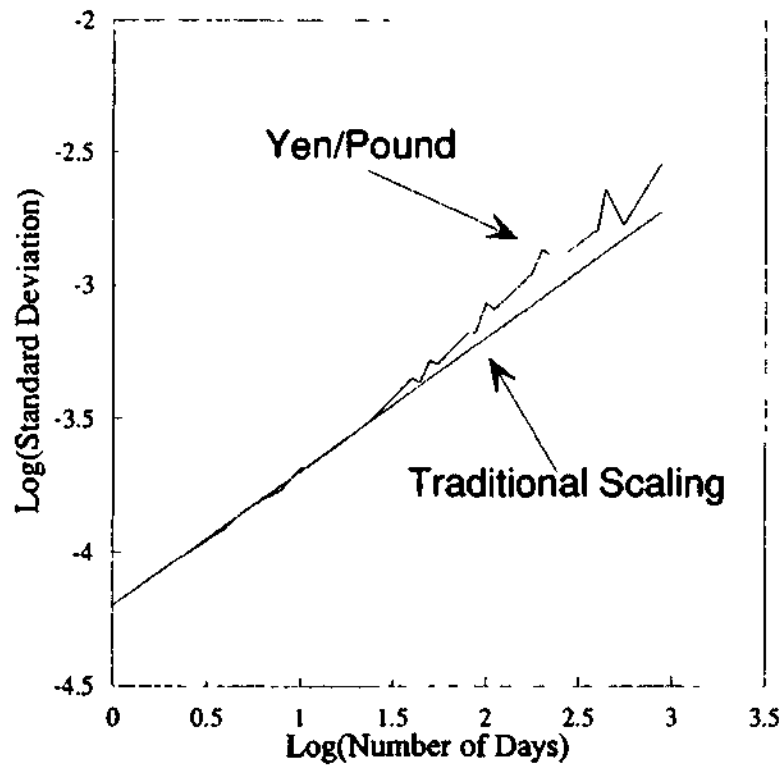


РИСУНОК 2.10с Обменный курс иена/фунт, временная структура волатильности.

Таблица 2.5 Обменные курсы валют, временная структура волатильности

	Марка/Доллар	Фунт/Доллар	Иена/Фунт
Выход регрессии:			
Константа	-4,19741	-4,22978	-4,25958
Стандартная ошибка			
Y (расчетная)	0,023194	0,040975	0,042455
R в квадрате	0,99712	0,991569	0,991174
Количество наблюдений	27	27	27
Степени свободы	25	25	25
X коэффициент(ы)	0,548986	0,565224	0,572267
Стандартная ошибка коэффициента	0,0059	0,010424	0,0108

ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО

Появление границ для акций и облигаций, но не для валюты, сначала озадачивает. Почему валюта является ценной бумагой, отличной от акций и облигаций? Этот вопрос уже содержит ответ.

В математике парадоксы происходят тогда, когда предположение неосторожно

Часть 1. Фрактальные временные ряды

забывается. Широко распространенная ошибка состоит в делении на переменную, которая может принимать ноль в качестве значения. В предыдущем абзаце в вопросе валюта названа "ценной бумагой". Валюта – объект, которым торгуют, но она не является ценной бумагой. Она не имеет инвестиционной стоимости. Прибыль от валюты можно получить, только *спекулируя* на ее стоимости против стоимости другой валюты. Валюта, таким образом, эквивалентна чисто спекулятивным средствам, которые обычно приравниваются к акциям и облигациям.

Акции и облигации не такие. Они, на самом деле, имеют инвестиционную стоимость. Облигации приносят проценты, а стоимость акции привязана к росту ее дохода вследствие экономической деятельности. Совокупный фондовый рынок привязан к совокупной экономике. Валюта же не привязана к экономическому циклу. В 1950-х и 1960-х годах у нас была развивающаяся экономика и сильный доллар. В 1980-х годах у нас была развивающаяся экономика и падающий доллар. Валюта не имеет "фундаментальной" стоимости, которая обязательно связана с экономической деятельностью, хотя она может быть привязана к экономическим переменным, таким как процентные ставки.

Почему акции и облигации являются ограниченными множествами? Возможным объяснением ограниченности является возвратный к среднему стохастический процесс, но он не объясняет растущее быстрее стандартное отклонение. Ограничения и быстро растущие стандартные отклонения обычно вызываются детерминистическими системами с периодическими или непериодическими циклами.

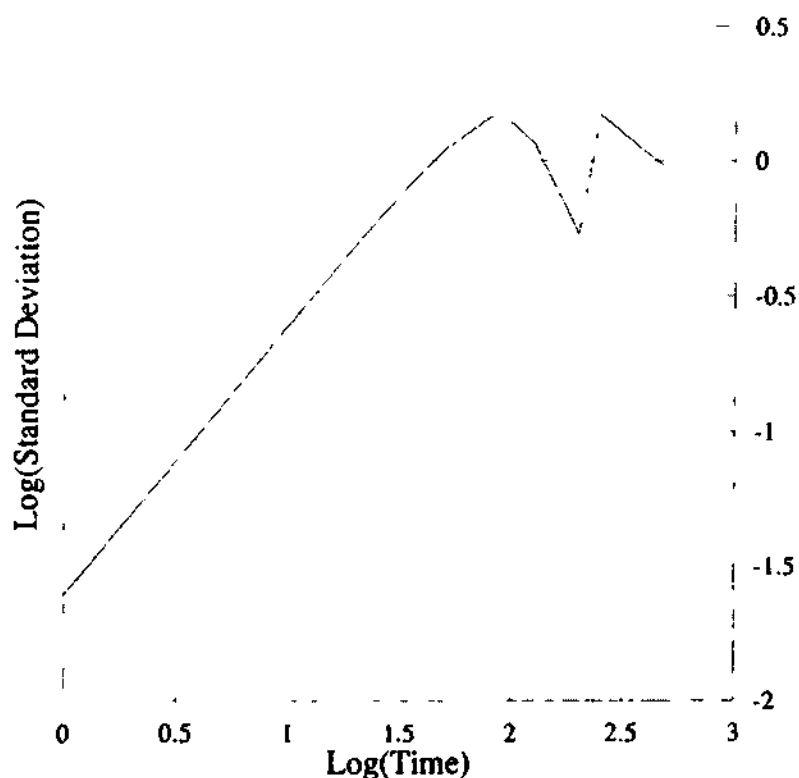


РИСУНОК 2.11 Синусоидальная волна, временная структура волатильности.

Рисунок 2.11 показывает временную структуру волатильности для простой

2. Несостоятельность гауссовой гипотезы

синусоидальной волны. Мы можем ясно видеть ограничения системы и более быстро растущее стандартное отклонение. Но мы знаем, что фондовые рынки и рынки облигаций не являются периодическими. Гранджер (Granger, 1964) и другие провели обширный спектральный анализ и не нашли никаких свидетельств периодических циклов.

Однако, Петерс (Peters, 1991b), а также Ченг и Тонг (Cheng and Tong, 1992) обнаружили признаки непериодических циклов, типично производимых нелинейными динамическими системами, или "хаосом".

В данный момент мы можем видеть свидетельство того, что акции, облигации, и валюта являются возможными нелинейными стохастическими процессами в краткосрочной перспективе, что подтверждается их частотными распределениями и временными структурами волатильности. Однако акции и облигации имеют признаки долгосрочного детерминизма. И снова мы видим локальную случайность и глобальный детерминизм.

ВЫВОДЫ

В этой книге мы рассмотрим методы различения независимого процесса, нелинейного стохастического процесса и нелинейного детерминированного процесса и исследуем, как эти различия влияют на наши инвестиционные стратегии и наши способности моделирования. Такие стратегии и способности моделирования тесно связаны с типом актива и нашим инвестиционным горизонтом.

Мы видели свидетельства того, что акции и облигации являются нелинейными и стохастическими в краткосрочной перспективе, но детерминированными в долгосрочной перспективе. Валюта кажется нелинейной и стохастической на всех инвестиционных горизонтах. Инвесторов больше бы интересовали акции и облигации; трейдеры могут работать со всеми тремя средствами в краткосрочном плане.

3

Гипотеза фрактального рынка

Мы видели в предыдущей главе, что рынки капитала не достаточно хорошо описываются нормальным распределением и теорией случайных блужданий. И все же, гипотеза эффективного рынка продолжает быть доминирующей парадигмой для того, как работают рынки. Майрон Шоулс (соавтор формулы опционного ценообразования Блэка-Шоулса) заявил *The New York Observer*: "Недостаточно только критиковать". Таким образом, в этой главе я предлагаю альтернативную теорию рыночной структуры.

Гипотеза эффективного рынка (ЕМН) была подробно рассмотрена в моей более ранней книге (Peters, 1991b). Однако краткий обзор ЕМН необходим, чтобы предложить альтернативу. После такого обзора мы вернемся к основам: Почему рынки существуют? Что участники ожидают и требуют от рынков? Из этого мы сформулируем гипотезу фрактального рынка. Гипотеза фрактального рынка – альтернатива ЕМН, а не модели оценки капитальных активов (САРМ). Но вследствие того, что эта модель базируется на эффективных рынках, САРМ также нуждается в замене. Несомненно, такая замена будет разработана – возможно, но не обязательно, на основе гипотезы фрактального рынка.

Гипотеза фрактального рынка придает экономическую и математическую структуру фрактальному анализу рынка. Посредством гипотезы фрактального рынка мы можем понять, почему существуют самоподобные статистические структуры, а также то, как распределяется риск среди инвесторов.

И СНОВА ЭФФЕКТИВНЫЕ РЫНКИ

ЕМН пытается объяснять статистическую структуру рынков. В случае ЕМН, однако, теория появилась после наложения статистических структур. Башелье (Bachelier, 1900) первым предположил, что рынки следуют случайным блужданиям и могут быть смоделированы стандартным исчислением вероятности. Однако он предложил мало эмпирических доказательств. Позже несколько математиков осознали, что курсы ценных бумаг на фондовом рынке были временным рядом, и до тех пор, пока рынки выполняли некоторые ограничительные требования, они могли быть смоделированы исчислением вероятности. Этот подход имел то преимущество, что он предлагал большой набор инструментов для исследования. Тем не менее, мнения математического сообщества разделились в отношении того, могла ли статистика (которая имела дело прежде всего с осуществлением выборки и проверкой качества) быть применена к временному ряду.

Самое строгое требование заключалось в том, что наблюдения должны были быть независимыми или, в лучшем случае, должны были иметь краткосрочную

3. Гипотеза фрактального рынка

память; то есть текущее изменение цен не могло быть выведено из предыдущих изменений. Это могло произойти, только если изменения цен были случайными блужданиями и если лучшая оценка будущей цены была текущей ценой. Такой процесс был бы "мартингалом" или справедливой игрой. (Подробную историю развития ЕМН можно найти в книге Peters (1991a).) Модель случайных блужданий говорила, что будущие изменения цены не могут быть выведены из прошлых изменений цены. Она ничего не говорила об экзогенной информации – экономической или фундаментальной информации. Таким образом, теория случайных блужданий была, прежде всего, наступлением на технический анализ. ЕМН шагнула немного дальше, сказав, в "полусильной" форме, что текущие цены отражают всю общественную информацию – все прошлые цены, опубликованные отчеты и экономические новости – из-за фундаментального анализа. Текущие цены отражают эту информацию, потому что все инвесторы имеют к ней равный доступ, и, будучи "рациональными", они, в своей коллективной мудрости, оценят ценную бумагу соответствующим образом. Таким образом, инвесторы, в совокупности, не могут получить прибыль от рынка, потому что рынок "эффективно" оценивает ценные бумаги по цене, которая отражает всю известную информацию.

Если бы существовало достаточное эмпирическое свидетельство для оправдания ЕМН, то ее развитие следовало бы нормальным научным рассуждениям, в которых:

- Некоторое поведение и структура сначала наблюдаются в системе или процессе.
- Затем развивается теория для согласования с известными фактами.
- Теория изменяется или пересматривается по мере того, как становятся известными новые факты.

В случае ЕМН, теория была развита, чтобы оправдать использование статистических инструментов, которые требуют независимости или, в лучшем случае, очень краткосрочной памяти. Теория часто вступала в противоречие с наблюдаемым поведением. Например, согласно ЕМН частота изменения цены должна быть хорошо представлена нормальным распределением. Мы видели в Главе 2, что дело обстоит не так. Существует слишком много больших изменений, идущих и вверх и вниз, во всех частотах, чтобы приспособить эту нормальную кривую к этим распределениям. Однако такие большие изменения были обозначены как особые события или "аномалии" и не включались в частотное распределение. Результатом исключения больших изменений и перенормирования является нормальное распределение. Изменения цены были обозначены как "приблизительно нормальные". Альтернативы нормального распределения, например, устойчивое распределение Парето, были отклонены, даже несмотря на то, что они соответствуют наблюдаемым стоимостям без модификаций. Почему? Стандартный статистический анализ не мог быть применен с использованием таких распределений.

ЕМН, разработанная для облегчения математической среды, была действительно научным примером того, как телега впрягалась перед лошастью. Взамен мы должны развить такую гипотезу рынка, которая соответствует наблюдаемым

фактам и, для начала, принимает во внимание то обстоятельство, почему рынки существуют.

УСТОЙЧИВЫЕ РЫНКИ ПРОТИВ ЭФФЕКТИВНЫХ РЫНКОВ

Нью-Йоркская фондовая биржа была организована группой трейдеров, которые собирались под известным платановым деревом в Нью-Йорке. Они имели одну общую основную потребность: ликвидность. Они рисовали в воображении одно место, где они могли все встретиться и найти покупателя, если один из них хотел продать, и продавца, если один из них хотел купить. Они хотели, чтобы эти сделки осуществлялись по хорошей цене, но иногда приходится брать то, что можешь получить. Им нужна была достаточная ликвидность, чтобы позволить инвесторам с различными инвестиционными горизонтами вкладывать капитал безразлично и анонимно друг от друга. За прошедшие два столетия технологический прогресс облегчил торговлю большими объемами акций; независимо от своего инвестиционного горизонта покупатель и продавец находят друг друга быстро и эффективно. Таким образом, дэйтрейдеры с 15-минутным инвестиционным горизонтом могли бы эффективно торговать с институциональными инвесторами с месячным или более долгим инвестиционным горизонтом. За исключением регулирования ценных бумаг для защиты инвесторов от мошенничества не предпринималось никаких попыток сделать торги "честными". Покупатель, который хочет купить большой пакет вяло обращающихся акций, должен заплатить премию за него. Инвесторы, которые хотят осуществить продажу на рынке с низким спросом, осуществляют продажу по более низкой цене, чем они хотели бы. Технология присутствует, чтобы гарантировать, что трейдер найдет покупателя (или продавца, в зависимости от обстоятельств), но не существует согласованного механизма определения того, какой должна быть "справедливая цена". Капиталистическая система спроса и предложения строго соблюдается. Инвесторы требуют от рынка ликвидности. Ликвидность будет гарантировать что:

1. Цена, которую получают инвесторы, *близка* к той, которую рынок считает справедливой;
2. Инвесторы с различными инвестиционными горизонтами могут эффективно торговать друг с другом;
3. Когда спрос и предложение становится несбалансированными, не наступает паника или стихийное бегство.

Ликвидность – не то же самое, что и объем торговли. Самые крупные крахи произошли тогда, когда имела место низкая ликвидность наряду с высоким объемом торговли. По-другому низкую ликвидность можно было бы назвать несбалансированным объемом торговли.

EMH ничего не говорит о ликвидности. Она говорит, что цены всегда справедливы, независимо от того, существует ликвидность или нет, или, альтернативно, что всегда существует достаточно ликвидности. Таким образом, EMH

не может объяснить крахи и панические бегства; при исчезновении ликвидности получение "справедливой" цены не может быть таким же важным, как и завершение торговли по любой стоимости.

Устойчивый рынок – не то же самое, что и "эффективный" рынок, как определено ЕМН. Устойчивый рынок – ликвидный рынок. Если рынок ликвиден, то цену можно рассматривать как близкую к "справедливой". Тем не менее, рынки не всегда ликвидны. Когда имеет место недостаток ликвидности, участвующие инвесторы готовы взять любую цену, которую они могут взять, при этом неважно, является ли она справедливой или нет.

ИСТОЧНИК ЛИКВИДНОСТИ

Если бы вся информация имела одинаковое воздействие на всех инвесторов, не было бы никакой ликвидности. После получения информации все инвесторы стали бы осуществлять одинаковые операции, пытаясь получить одинаковую цену. Тем не менее, инвесторы не однородны. Некоторые трейдеры должны торговать и создавать прибыль каждый день. Некоторые торгуют, чтобы выполнить обязательства, которые будут реализованы только через много лет в будущем. Некоторые обладают высокой долей заемных средств. Некоторые высоко капитализированы. Фактически, важность информации можно рассматривать, как в значительной степени зависящую от инвестиционного горизонта инвестора. Возьмем типичного дэйтрейдера, чей инвестиционный горизонт составляет пять минут и в настоящее время является долгосрочным на рынке. Среднее пятиминутное изменение цен в 1992 г. составляло 0,000284 процента со стандартным отклонением в 0,05976 процента. Если, по техническим причинам, для пятиминутного горизонта происходило падение в шесть стандартных отклонений или 0,359 процента, наш дэйтрейдер мог быть уничтожен, если бы падение продолжилось. Однако институциональный трейдер – пенсионный фонд, например – с недельным горизонтом торговли, вероятно, счел бы падение возможностью покупки, потому что недельные прибыли за прошедшие десять лет составили в среднем 0,22 процента со стандартным отклонением в 2,37 процента. Кроме того, техническое падение не изменило перспективу недельного трейдера, который смотрит или на более долговременную техническую, или на фундаментальную информацию. Таким образом, событие 6-сигма для однодневного трейдера – это событие 0,15-сигма для недельного трейдера, т.е. оно не представляет для него большой важности. Недельный трейдер приходит, покупает и создает ликвидность. Эта ликвидность, в свою очередь, стабилизирует рынок.

Все инвесторы, торгующие на рынке одновременно, имеют разные инвестиционные горизонты. Мы можем также сказать, что информация, которая важна в каждом инвестиционном горизонте, различна. Таким образом, источник ликвидности – это инвесторы с различными инвестиционными горизонтами, различными информационными множествами и, следовательно, различными представлениями о "справедливой цене".

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА И ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ГОРИЗОНТЫ

В любом торговом пространстве фактически все инструменты однодневного трейдера являются техническими. Хотя, вероятно, там будут информационные службы, которые предлагают объявления о доходах, и отчеты специалистов по ценным бумагам могут лежать поблизости, диаграммы – самый важный инструмент. Управляющий портфелем, вероятно, будет иметь и техническую и фундаментальную информацию, но пропорции будут обратными. Решение о покупке и продаже, при нормальных обстоятельствах, будет зависеть от фундаментальной информации, хотя в ходе торговли может использоваться технический анализ.

К этим двум упрощенным портретам существуют исключения, но я полагаю, что большинство практиков обнаружат, что они близки их опыту. Краткосрочные инвесторы следуют, главным образом, техническому анализу. Долгосрочные инвесторы, вероятнее всего, будут следовать фундаментальным принципам. (Существует, конечно, много управляющих портфелем с короткими инвестиционными горизонтами). Пока эта модель работает, "справедливая" стоимость акции определяется двумя различными способами:

1. Для однодневных трейдеров стандартом является высокая цена в течение дня, когда они продают, или низкая цена в течение дня, когда они покупают. Имеет ли эта цена что-то общее с действительной стоимостью – спорный вопрос.
2. Для долгосрочных инвесторов фактическая цена покупки или продажи становится менее важной относительно высокой или низкой цены дня. Она не является неважной, но если акция была во владении в течение шести месяцев, прибыль на +31 процент все еще считается столь же приемлемой, как и прибыль на +32 процента. Однако такое 1-процентное различие может быть очень существенно для дэйтрейдера.

Ликвидность также зависит от типа информации, которая циркулирует на рынке, а также от того, какой инвестиционный горизонт находит ее важной.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЫНКОВ, ПОВТОРЕНИЕ

В Главе 2 мы обсуждали некоторые из статистических характеристик рынков. Для акций, облигаций и валют мы обнаружили, что частотное распределение прибылей является распределением с толстыми хвостами и высоким пиком, которое существует на многих различных инвестиционных горизонтах. Таблица 3.1 содержит данные для 5-минутных, 30-минутных и 60-минутных прибылей для периода с 1989 по 1990 гг. Сравните их с частотными распределениями, показанными в Главе 2. Между ними мало разницы, и они определенно не являются нормально распределенными. Новой рыночной гипотезе пришлось бы дать объяснение этому наблюдаемому свойству рынков.

3. Гипотеза фрактального рынка

Таблица 3.1 Частотные распределения (%) суточных прибылей

Стандартные отклонения	1989-1990 60-минут	1989-1990 30-минут	1989 5-минут	1990 5-минут
Менее чем -4,00	0,40%	0,37%	0,52%	0,47%
-3,80	0,05	0,11	0,08	0,08
-3,60	0,00	0,05	0,11	0,08
-3,40	0,05	0,15	0,15	0,09
-3,20	0,10	0,12	0,12	0,15
-3,00	0,07	0,16	0,17	0,13
-2,80	0,10	0,27	0,18	0,20
-2,60	0,25	0,13	0,23	0,23
-2,40	0,50	0,30	0,35	0,28
-2,20	0,69	0,41	0,48	0,35
-2,00	0,79	0,46	0,51	0,41
-1,80	0,89	0,66	0,65	0,58
-1,60	0,87	0,94	0,76	0,67
-1,40	1,46	1,18	0,89	0,78
-1,20	1,61	1,75	1,21	0,99
-1,00	2,70	2,27	1,34	1,62
-0,80	3,05	3,21	2,27	2,16
-0,60	4,61	4,30	3,60	3,85
-0,40	6,49	7,19	6,71	7,15
-0,20	8,45	9,18	11,75	13,77
0,00	16,11	15,22	16,44	19,58
0,20	13,28	15,14	19,92	16,26
0,40	9,52	9,57	10,80	10,60
0,60	7,78	8,37	6,28	6,04
0,80	5,63	5,25	3,65	3,00
1,00	4,61	4,08	2,52	2,13
1,20	3,02	2,48	1,86	1,42
1,40	1,81	1,63	1,25	1,43
1,60	1,16	1,39	1,00	1,18
1,80	0,99	0,86	0,82	0,95
2,00	0,82	0,73	0,67	0,65
2,20	0,57	0,58	0,50	0,47
2,40	0,55	0,36	0,43	0,45
2,60	0,35	0,27	0,26	0,32
2,80	0,12	0,20	0,31	0,28
3,00	0,17	0,17	0,20	0,22
3,20	0,05	0,12	0,15	0,24
3,40	0,07	0,07	0,13	0,15
3,60	0,05	0,08	0,12	0,14
3,80	0,05	0,01	0,06	0,08
Более чем 4,00	0,15	0,20	0,53	0,47

Часть 1. Фрактальные временные ряды

Второе свойство, которое мы наблюдали в Главе 2, касалось временной структуры волатильности. Стандартное отклонение прибыли увеличивалось более быстрым темпом, чем квадратный корень из времени. Для акций и облигаций временная структура волатильности была ограничена; для валюты не было никаких ограничений. Еще раз повторю, что это важные свойства, которые должны быть объяснены. Мы должны также объяснить, почему оказывается так, что стандартная гауссова статистика иногда работает хорошо, а иногда плохо. Известно, что корреляции приходят и уходят и что волатильность является очень нестабильной. Кроме того, беты CAPM обычно стабильны, но не всегда. Спор по поводу EMH сбивается с толку тем фактом, что временные периоды, как может быть обнаружено, поддерживают обе стороны спора. Когда рынки считаются "стабильными", EMH и CAPM, кажется, работают хорошо. Однако во время паники и стихийных бегств такие модели ломаются подобно "сингулярностям" в физике. Это не является неожиданностью, потому что EMH и CAPM – модели равновесия. Они не могут справиться с переходом к турбулентности. Новой рыночной гипотезе понадобилась бы способность объяснить эту сингулярную характеристику торговых рынков.

ГИПОТЕЗА ФРАКТАЛЬНОГО РЫНКА

Гипотеза фрактального рынка подчеркивает воздействие ликвидности и инвестиционных горизонтов на поведении инвесторов. Чтобы сделать гипотезу как можно более общей, она не налагает никаких статистических требований на процесс. Мы оставим это для более поздних глав. Цель гипотезы фрактального рынка состоит в том, чтобы дать модель поведения инвестора и движений рыночной цены, которые соответствуют нашим наблюдениям.

Рынки существуют для того, чтобы обеспечить стабильную, ликвидную окружающую среду для торговли. Инвесторы хотят получить хорошую цену, но она не обязательно будет "справедливой" ценой в экономическом смысле. Например, покупка ценных бумаг для покрытия обязательств по срочным сделкам редко происходит по справедливой цене. Рынки остаются стабильными, когда многие инвесторы на них участвуют и имеют много различных инвестиционных горизонтов. Когда пятиминутный трейдер переживает событие 6-сигма, инвестор с более долгосрочным инвестиционным горизонтом должен вступить на рынок и стабилизировать его. Инвестор сделает так, потому что в пределах его или ее инвестиционного горизонта событие 6-сигма пятиминутного трейдера не является необычным. До тех пор пока другой инвестор имеет более долгий горизонт торговли, чем инвестор в кризисе, рынок стабилизируется. По этой причине инвесторы должны иметь общие уровни риска (с учетом масштаба инвестиционного горизонта), и общий риск объясняет, почему частотное распределение прибыли выглядит одинаково на различных инвестиционных горизонтах. Мы называем такое предположение гипотезой *фрактального* рынка вследствие такой самоподобной статистической структуры.

При нарушении фрактальной структуры рынки становятся нестабильными. Нарушение происходит тогда, когда инвесторы с длинными инвестиционными

3. Гипотеза фрактального рынка

горизонтами или прекращают участвовать на рынке, или сами становятся краткосрочными инвесторами. Инвестиционные горизонты сокращаются, когда инвесторы чувствуют, что более долговременная фундаментальная информация, которая является основанием их рыночных оценок, более не важна или ненадежна. Периоды экономического или политического кризиса, когда долгосрочная перспектива становится очень неопределенной, вероятно, объясняют большинство этих событий.

Этот тип нестабильности отличается от медвежьих рынков. Медвежьи рынки базируются на снижении фундаментальной оценки. Неустойчивость характеризуется чрезвычайно высокими уровнями краткосрочной волатильности. Конечным результатом может быть существенное падение, существенное повышение или ценовой эквивалент начала – и все это за очень короткое время. Однако первые два результата кажутся более распространенными, чем последний.

Примером этого была реакция рынка на убийство президента Кеннеди 22 ноября 1963 г. В результате внезапной смерти государственного лидера рынок оказался в неуправляемом штопоре; влияние его смерти на долгосрочные перспективы страны было неопределенным. Мое предположение заключается в том, что долгосрочные инвесторы либо не принимали участия в тот день, либо они запаниковали и стали краткосрочными инвесторами. Как только фундаментальная информация потеряла свою значимость, эти долгосрочные инвесторы сократили свой инвестиционный горизонт и начали торговать на кардинально отрицательной технической динамике. Рынок был закрыт до окончания похорон президента. Ко времени повторного открытия рынка инвесторы могли лучше судить о воздействии смерти президента на экономику, долгосрочная оценка вернулась, и рынок стабилизировался.

Перед крахом 19 октября 1987 г. долгосрочные инвесторы начали сосредотачиваться на долгосрочных перспективах рынка, основываясь на высокой оценке и ужесточающейся валютной политике Федерального резерва. В результате они начали продавать свои акции. В крахе доминировали трейдеры с чрезвычайно короткими инвестиционными горизонтами. Долгосрочные инвесторы либо не делали ничего (что означало, что им для оправдания действий были нужны более низкие цены), либо сами стали краткосрочными трейдерами, как они сделали в день убийства Кеннеди. Вероятно, имели место оба типа поведения. В крахе 19 октября 1987 г. доминировала краткосрочная информация (или техническая информация). В результате рынок достиг новых высот неустойчивости и не стабилизировался до тех пор, пока в течение следующих дней не вмешались с покупками долгосрочные инвесторы.

Позднее, надвигающаяся война в Персидском заливе вызвала классические "американские горки" на рынке 19 января 1990 г. Джеймс Бейкер, тогдашний Госсекретарь, встречался с иракским Министром иностранных дел, Тариком Азизом, чтобы обсудить иракский ответ на ультиматум, поставленный Союзниками. Ожидаемая война заставила инвесторов сконцентрироваться на коротком сроке; они, очевидно, решили, что фундаментальная информация была бесполезна в такой

Часть 1. Фрактальные временные ряды

неопределенной окружающей обстановке. В результате торговля на рынке осуществлялась на основании слухов и праздных спекуляций. Когда встреча двух государственных деятелей затянулась дольше, чем ожидалось, индекс Доу-Джонса для акций промышленных предприятий взлетел на 40 пунктов в ожидании того, что было близко принятие решения путем переговоров. Когда встреча, наконец, завершилась, но не поступило никаких сообщений о каком-либо продвижении, рынок резко упал на 39 пунктов. Не было никакой фундаментальной причины для такого широкого колебания на рынке. Инвесторы, очевидно, стали краткосрочно-ориентированными, или долгосрочные инвесторы не приняли участия. В любом случае, рынок потерял ликвидность и стал нестабильным.

Фрактальная статистическая структура существует, потому что она – устойчивая структура, очень похожая на фрактальную структуру легкого, которая обсуждалась в Главе I. В легком диаметр каждого поколения ответвления уменьшается согласно степенному закону. Однако в пределах каждого поколения есть, фактически, диапазон диаметров. Они существуют, потому что каждое поколение зависит от предыдущих. Если бы одно поколение было бесформенным, и каждое ответвление имело бы одинаковый диаметр, то все легкое могло бы стать бесформенным. Если во фрактальной структуре бесформенна одна ветвь, общее статистическое распределение диаметров компенсирует бесформенную ветвь. На рынках диапазон статистических распределений по различным инвестиционным горизонтам выполняет ту же самую функцию. Пока участвуют инвесторы с различными инвестиционными горизонтами, паника на одном горизонте может быть поглощена другими инвестиционными горизонтами в качестве возможности покупки (или продажи). Тем не менее, если весь рынок имеет один и тот же инвестиционный горизонт, то он становится нестабильным. Нехватка ликвидности превращается в панику.

Когда инвестиционный горизонт становится однородным, рынок входит "в свободное падение"; то есть, в последовательности ценообразования появляются разрывы. В гауссовой окружающей среде большое изменение является суммой многочисленных небольших изменений. Однако во время паники и панических бегств рынок часто перескакивает через цены. Разрывы вызывают большие изменения, и в частотном распределении прибылей появляются жирные хвосты. Эти разрывы, в свою очередь, являются результатом недостатка ликвидности, вызванного появлением однородного инвестиционного горизонта для участников рынка.

Существует и иное объяснение некоторых крупных событий. Если информация, полученная рынком, важна и для краткосрочного, и для долгосрочного горизонтов, ликвидность также может быть затронута. Например, 1 апреля 1993 г. компания «Филлип Моррис» объявила о снижении цен на сигареты Marlboro. Это, конечно, уменьшило долгосрочные перспективы компании, и акции понизились соответственно. При открытии биржи цена акций составляла 48 \$, что было на 17 1/8 ниже, чем их цена в 55 \$ 1/8 при предыдущем закрытии биржи. Тем не менее, прежде чем биржа открылась, технические аналитики Си-эн-би-си, кабельной сети финансовых новостей, заявили, что следующий уровень сопротивления акций составит 50. При закрытии биржи цена акций компании «Филлип Моррис» составила

3. Гипотеза фрактального рынка

49 1/2. Возможно, что цена в 49 1/2 была "справедливой" стоимостью компании «Филлип Моррис», но настолько же вероятно, что на сей раз техники стабилизировали рынок.

Даже при достижении рынком стабильной статистической структуры рыночная динамика и мотивации изменяются по мере расширения инвестиционного горизонта. Чем короче срок инвестиционного горизонта, тем более важными становятся технические факторы, торговая деятельность и ликвидность. Инвесторы следуют за тенденциями и друг за другом. Может доминировать поведение толпы. По мере роста инвестиционного горизонта технический анализ постепенно уступает место фундаментальным и экономическим факторам. Цены, в результате, отражают эти отношения и повышаются и падают по мере повышения и падения ожиданий дохода. Ожидания дохода с течением времени постепенно повышаются. Если существует ощущение того, что произойдет изменение в экономическом направлении, ожидания дохода могут быстро полностью измениться. Если рынок не имеет отношения к экономическому циклу или если это отношение очень слабое, торговая деятельность и ликвидность сохраняют свою важность даже на длинных горизонтах. Если рынок связан с экономическим ростом в течение долгого срока, с течением времени риск уменьшится вследствие доминирования экономического цикла. Экономический цикл менее изменчив, чем торговая деятельность, что делает долгосрочные прибыли по акциям также менее изменчивыми. Такое отношение сделало бы дисперсию ограниченной. Экономические рынки капитала, например акций и облигаций, имеют краткосрочную фрактальную статистическую структуру, которая накладывается на долгосрочный экономический цикл, который может быть детерминирован. Валюта, будучи только вторичным рынком, имеет только фрактальную статистическую структуру.

Наконец, сама информация не имела бы однородного воздействия на цены; вместо этого информация ассимилировалась бы различными инвестиционными горизонтами по-разному. Оживление рынка, вызванное текущими факторами, только постепенно стало бы очевидным или важным для инвесторов с долгосрочными горизонтами. Аналогичным образом, экономические факторы изменили бы ожидания. По мере того как долгосрочные инвесторы изменяют свою оценку и начинают торговать, появляется техническая тенденция и влияет на краткосрочных инвесторов. В краткосрочной перспективе может ожидаться, что изменения цены будут более шумным, потому что общее соглашение о справедливой цене и, следовательно, о приемлемых пределах вокруг справедливой цены, является более крупным компонентом совокупного дохода. В более долговременных инвестиционных горизонтах есть больше времени для усваивания информации и, следовательно, больше согласия относительно надлежащей цены. В результате, чем долговременнее инвестиционный горизонт, тем более гладким является временной ряд.

ВЫВОДЫ

Гипотеза фрактального рынка предлагает следующее:

1. Рынок стабилен, когда он состоит из инвесторов, охватывающих большое

Часть 1. Фрактальные временные ряды

количество инвестиционных горизонтов. Это гарантирует, что существует достаточно ликвидности для трейдеров.

2. Информационное множество больше связано с настроением рынка и техническими факторами в краткосрочной перспективе, чем в более долгосрочной перспективе. По мере увеличения инвестиционных горизонтов доминирует более долговременная фундаментальная информация. Таким образом, изменения цены могут отражать информацию, важную только для этого инвестиционного горизонта.
3. Если происходит событие, которое ставит под сомнение действительность фундаментальной информации, долгосрочные инвесторы либо прекращают участие на рынке, либо начинают торговать на основании краткосрочного информационного множества. Когда общий инвестиционный горизонт рынка сокращается до однородного уровня, рынок становится нестабильным. Нет долгосрочных инвесторов, чтобы стабилизировать рынок, предлагая ликвидность краткосрочным инвесторам.
4. Цены отражают сочетание краткосрочной технической торговли и долгосрочной фундаментальной оценки. Таким образом, вероятно, что краткосрочные изменения цен будут более волатильными или "более шумными", чем долгосрочные. Основная тенденция на рынке отражает изменения в ожидаемом доходе на основании изменяющейся экономической среды. Краткосрочные тенденции, более вероятно, являются результатом поведения толпы. Нет причин полагать, что длина краткосрочных тенденций связана с долгосрочной экономической тенденцией.
5. Если ценная бумага никак не связана с экономическим циклом, то не будет никакой долгосрочной тенденции. Будут доминировать торговля ценными бумагами, ликвидность и краткосрочная информация.

В отличие от ЕМН гипотеза фрактального рынка (FMH) говорит, что информация оценивается согласно инвестиционному горизонту инвестора. Поскольку различные инвестиционные горизонты оценивают информацию по-разному, распространение информации также будет неровным. В любой конкретный момент времени цены не могут отражать всю имеющуюся информацию, они могут отражать только ту информацию, которая важна для этого инвестиционного горизонта.

FMH многим обязана гипотезе когерентного рынка (Coherent Market Hypothesis – CMH) Вега (Vega, 1991) и K-Z модели Ларрейна (Larrain, 1991). Я подробно рассматривал эти модели в своей предыдущей книге. Подобно CMH FMH основывается на той предпосылке, что рынок принимает различные состояния и может перемещаться между стабильным и нестабильным режимами. Подобно K-Z модели FMH находит, что хаотический режим имеет место, когда инвесторы теряют веру в долгосрочную фундаментальную информацию. Во многих отношениях FMH объединяет эти две модели посредством использования инвестиционных горизонтов; она определяет, когда изменяется режим и почему рынки становятся нестабильными, когда фундаментальная информация теряет свою значимость. Ключевой момент заключается в том, что согласно FMH рынок стабилен, когда он не имеет

3. Гипотеза фрактального рынка

характерного масштаба времени или инвестиционного горизонта. Нестабильность наступает тогда, когда рынок теряет свою фрактальную структуру и принимает довольно однородный инвестиционный горизонт.

В этой главе я наметил в общих чертах новое представление о структуре рынков. К сожалению, большая часть стандартного анализа рынка предполагает, что рыночный процесс, по существу, является стохастическим. При проверке гипотезы эффективного рынка (EMH) это предположение вызывает мало проблем. Однако для FMH многие из стандартных проверок теряют свою силу. Это не говорит о том, что они бесполезны. Большое количество исследований с использованием стандартной методологии указало на несогласованность между EMH и наблюдаемой конъюнктурой рынка; однако новые методологии также необходимы, чтобы воспользоваться преимуществом рыночной структуры, намеченной в FMH. Для достижения этих целей уже разработаны многие методы. В Части 2 мы рассмотрим один из них: R/S-анализ. Мой акцент на R/S-анализе не предполагает, что он вытеснит другие методологии. Моя цель состоит в том, чтобы показать, что он является сильной формой анализа временного ряда и должен быть одним из инструментов любого аналитика.

ЧАСТЬ 2

ФРАКТАЛЬНЫЙ (R/S) АНАЛИЗ

4

Измерение памяти – процесс Херста и R/S-анализ

Стандартный статистический анализ начинается с выдвижения предположения о том, что изучаемая система является, прежде всего, случайной; то есть причинный процесс, создавший временной ряд, имеет много составных частей или степеней свободы, и взаимодействие этих компонентов настолько комплексно, что детерминистичное объяснение невозможно. Только вероятности могут помочь нам понять процесс и использовать его в своих интересах. Лежащая в основе философия подразумевает, что случайность и детерминизм не могут сосуществовать. В Главе 1 мы рассматривали нелинейные стохастические и детерминированные системы, которые представляли собой комбинации случайности и детерминизма, например, игру хаоса. К сожалению, как мы видели в Главе 2, эти системы недостаточно хорошо описываются стандартной гауссовой статистикой. До сих пор мы исследовали эти нелинейные процессы, используя численные эксперименты в зависимости от конкретного случая. Для изучения статистики этих систем и создания более общей аналитической структуры нам нужна теория вероятности, которая является непараметрической. То есть нам нужна статистика, которая не делает предварительных предположений о форме распределения вероятностей, которое мы изучаем.

Стандартная гауссова статистика лучше всего работает на основе весьма ограничивающих предположений. *Центральная предельная теорема* (или Закон больших чисел) утверждает, что по мере проведения все большего числа испытаний, предельное распределение случайной системы будет нормальным распределением, или колоколообразной кривой. Измеряемые события должны быть "независимы и идентично распределены" (IID). То есть события не должны влиять друг на друга, и они все должны иметь одинаковую вероятность наступления. Долгое время предполагалось, что большинство крупных, комплексных систем должны моделироваться таким образом. Предположение о нормальности, или почти нормальности, обычно делалось при исследовании крупной, комплексной системы, так чтобы мог быть применен стандартный статистический анализ.

Но что делать, если система не является IID? Тогда вносятся корректировки, чтобы создать статистические структуры, которые, не являясь IID, являются

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

достаточно близкими к ним, так что стандартные методы все же могут применяться с некоторыми видоизменениями. Конечно, есть случаи, где эта логика оправдывается, но это привело к процессу рационализации в отношении рынков капитала и экономической теории и этот процесс привел нас в тупик. В книге *"Хаос и порядок на рынках капитала"* я довольно подробно об этом говорил. Я не собираюсь повторять здесь эти аргументы, но стоит упомянуть, что сначала появился статистический анализ рынков, а затем последовала гипотеза эффективного рынка.

Если изучаемая система не является ИД, или близкой к таковой, что мы должны делать? Нам нужен непараметрический метод. К счастью, очень здравая непараметрическая методология была открыта Х. Е. Херстом знаменитым британским гидрологом, который в 1951 г. опубликовал работу, озаглавленную "Долгосрочная вместимость водохранилища". На первый взгляд работа рассматривала моделирование проекта водохранилища, но Херст включил в свое исследование многие естественные системы и дал нам новую статистическую методологию для различения случайных и неслучайных систем, постоянства трендов и продолжительности циклов, если таковые имеются. Короче говоря, он дал нам метод, названный методом нормированного размаха, или R/S-анализом, используемый для различения случайного временного ряда и фрактального временного ряда. Перейдем теперь к его методологии.

В этой главе даются предпосылки рассуждений Херста и примеры из его ранней работы. В Главе 5 мы рассмотрим значимость результатов. Глава 6 покажет, как R/S-анализ может использоваться для анализа периодических и непериодических циклов.

ПРЕДПОСЫЛКИ: РАЗВИТИЕ R/S-АНАЛИЗА

Х. Е. Херст (1900-1978) строил плотины. В начале 20-ого столетия он работал над проектом нильской плотины. Он изучил Нил настолько хорошо, что некоторые египтяне, как говорят, дали ему прозвище "Отец Нила". Нил поставил интересную проблему перед Херстом как гидрологом. При проектировании плотины гидрологов интересует вместимость образующегося водохранилища. Приток воды происходит благодаря нескольким естественным элементам (осадки, разлив реки и т. д.), и регулируемое количество воды используется для выращивания зерновых культур. Вместимость водохранилища основана на оценке притока воды и потребности в оттоке воды. Большинство гидрологов начинает с предположения о том, что приток воды является случайным процессом – совершенно разумное предположение, когда имеешь дело с комплексной экосистемой. Херст, однако, изучил 847-летние записи, которые вели египтяне о разливах Нила, с 622 г. н.э. до 1469 г. н.э. Эти записи не показались ему случайными. Разливы больше среднего вероятнее всего сопровождались большими разливами. Затем процесс резко менялся, и разлив был меньше среднего, а за ним следовали другие разливы меньше среднего. Короче говоря, казалось, что имели место циклы, но их продолжительность была

4.Измерение памяти – процесс Херста и R/S анализ

непериодична. Стандартный анализ показал отсутствие статистически существенных взаимосвязей между наблюдениями, так что Херст разработал свою собственную методологию.

Херст знал о работе Эйнштейна (1908) о броуновском движении (беспорядочный путь, который проходит частица, взвешенная в жидкости). Броуновское движение стало первичной моделью для процесса случайных блужданий. Эйнштейн обнаружил, что расстояние, которое проходит случайная частица, увеличивается пропорционально квадратному корню из времени, используемому для его измерения, или:

$$R = T^{0,50} \quad (4.1)$$

где R = пройденное расстояние,

а T = показатель времени

Уравнение (4.1) называют "*правилом T в степени 1/2*", и оно обычно используется в статистике. Мы используем его в финансовой экономике, чтобы пересчитать на год волатильность или стандартное отклонение. Мы берем стандартное отклонение ежемесячных прибылей и умножаем его на квадратный корень из 12. Мы предполагаем, что дисперсия прибылей увеличивается как квадратный корень из времени. Херст чувствовал, что, используя это свойство, он мог проверить разливы Нила на случайность.

Мы начинаем с временного ряда $x = x_1, \dots, x_n$, чтобы представить n последовательных значений. (В этой книге мы говорим о временном ряде x, имея в виду весь x_r , где r = от 1 до n. Определенный элемент x будет включать его нижний индекс. Эта система обозначений будет применяться ко всем временным рядам). Показатель времени, в общем, неважен. В случае Херста, он представлял собой ежегодный слив Нила. Для рынков это могут быть ежедневные изменения цены индекса курса акций. Среднее значение x_m временного ряда x определяется как:

$$x_m = (x_1 + \dots + x_n)/n \quad (4.2)$$

Стандартное отклонение s_n оценивается как:

$$s_n = n^{-1/2} * \sqrt{(x_r - x_m)^2} \quad (4.3)$$

что является просто стандартной нормальной формулой для стандартного отклонения. Нормированный размах был рассчитан путем первоначального изменения масштаба или "нормализации" данных, посредством вычитания выборочного среднего:

$$Z_r = (x_r - x_m); \quad r = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Полученный в результате ряд Z теперь имеет среднее, равное нулю.

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

Следующий шаг создает кумулятивный временной ряд Y :

$$Y_t = (Z_t + Z_t) \quad t = 2, \dots, n \quad (4.5)$$

Обратите внимание, что, по определению, последнее значение Y (Y_n) всегда будет нулем, потому что Z имеет среднее значение, равное нулю. Скорректированный размах R_n является максимумом за вычетом минимального значения Y_t :

$$R_n = \max(Y_1, \dots, Y_n) - \min(Y_1, \dots, Y_n) \quad (4.6)$$

Нижний индекс n для R_n теперь показывает, что это – скорректированный размах для x_1, \dots, x_n . Поскольку Y был скорректирован к среднему нулю, максимальное значение Y всегда будет больше или равно нулю, а минимальное значение всегда будет меньше или равно нулю. Следовательно, скорректированный размах R_n всегда будет неотрицателен.

Этот скорректированный размах R_n является расстоянием, на которое перемещается система за показатель времени n . Если мы устанавливаем $n = T$, мы можем применить уравнение (4.1) при условии, что временной ряд x независим для увеличения значений n . Однако уравнение (4.1) применимо только к временному ряду, который находится в броуновском движении: он имеет нулевое среднее и дисперсию, равную единице. Для применения этой концепции к временному ряду, который не находится в броуновском движении, нам необходимо обобщить уравнение (4.1) и принять во внимание системы, которые не являются независимыми. Херст обнаружил следующую более общую форму уравнения (4.1):

$$(R/S)_n = c * n^H \quad (4.7)$$

Нижний индекс n для $(R/S)_n$ относится к значению R/S для x_1, \dots, x_n ; $c =$ константа.

Значение R/S уравнения (4.7) называется *нормированным размахом*, потому что оно имеет нулевое среднее и выражается в терминах местного стандартного отклонения. В общем, значение R/S изменяет масштаб по мере увеличения нами приращения времени n согласно значению степенной зависимости, равному H , который обычно называется *показателем Херста*. В этом заключается первая связь явлений Херста с фрактальной геометрией, описанной в Главе 1. Вспомните, что все фракталы изменяют масштаб согласно степенной зависимости. В легком млекопитающих диаметр каждого ответвления уменьшался в масштабе согласно обратному значению степенной зависимости. Это обратное значение степенной зависимости равнялось фрактальной размерности структуры. Однако в отношении временного ряда мы идем от меньших приращений времени к большим, а не от больших поколений ответвлений к меньшим, как в легком. Диапазон увеличивается согласно степени. Это называется *масштабированием со степенной зависимостью (power-law scaling)*. Опять же, это является характерной, хотя и не исключительной, чертой фракталов. Нам нужны другие характеристики, прежде чем мы сможем

4.Измерение памяти – процесс Херста и R/S анализ

назвать явления Херста "фрактальными". Мы рассмотрим их в свое время.

Нормирование скорректированного диапазона путем деления на стандартное отклонение, оказалось ловким ходом. Херст первоначально выполнил это действие, чтобы сравнить различные явления. Как мы увидим, нормирование также позволяет нам сравнивать периоды времени, которые могут разделять многие годы. Сравнение прибыли по акциям в 1920-х гг. с таковой в 1980-х гг. является проблематичным из-за инфляции цен. Нормирование сводит эту проблему к минимуму. Нормируя данные к нулевому среднему и стандартному отклонению, равному единице, чтобы обеспечить сравнение различных явлений и периодов времени, Херст предвосхитил теорию ренормализационных групп в физике. Теория ренормализационных групп выполняет схожие преобразования для изучения фазовых переходов, где характерные масштабы прекращают существование. Анализ нормированного размаха может также описывать временной ряд, не имеющий характерного масштаба. И опять же это является характерной чертой фракталов.

Показатель Херста может быть приближен посредством вычерчивания $\log(R/S_n)$ против $\log(n)$ и вычисления наклона через простую регрессию методом наименьших квадратов. В частности мы работаем на основе следующего уравнения:

$$\log(R/S_n) = \log(c) + H \cdot \log(n) \quad (4.8)$$

Если бы система была независимо распределена, то $H = 0,50$. Херст сначала изучал реку Нил. Он обнаружил, что $H = 0,91!$ Нормированный размах увеличивался быстрее, чем квадратный корень из времени. Он увеличивался как 0,91 корня из времени, что подразумевало, что система (в данном случае диапазон высоты Нила) проходила большее расстояние, чем проходил бы вероятностный процесс. Для прохождения большего расстояния было необходимо, чтобы изменения в ежегодных нильских разливах влияли друг на друга. Они должны были быть скоррелированы. Хотя существуют авторегрессионные (AR) процессы, которые могут вызвать краткосрочные корреляции, между такими разливами реки проходил один год. Казалось маловероятным, что простой AR(1) или AR(2) процесс вызывал эти аномальные результаты.

Когда Херст решил проверить другие реки, он обнаружил, что записи не были такими подробными, как для Нила. Тогда он расширил свое исследование и обратился к более разнообразным явлениям природы – выпадению осадков, пятнам на солнце, структуре поведения грязи, годичным кольцам, т.е. к тем явлениям, которые обладали длинным временным рядом. Полученные им результаты приведены в таблице 4.1 и на рисунке 4.1. Таблица и рисунок взяты из работы Херста (Hurst, 1951).

Рисунок 4.1 – первый из ряда графиков в логарифмическом масштабе по обеим осям, которые мы будем исследовать. Херст первоначально обозначил масштабный коэффициент "К". Мандельброт переименовал его в "Н" в честь Херста, и мы продолжаем эту традицию. Поэтому на рисунке 4.1 и в таблице 4.1 $K = H$. Наклон этого графика в логарифмическом масштабе по обеим осям является показателем Херста H .

Таблица 4.1 R/S-анализ Херста (1951)

Явление	Свойства K на основании природных явлений						Коэфф. автокорреляции
	Диапазон N лет	Число		K		Диапазон	
		Явления	Множества	Среднее	Станд. откл.		
Речной сбор	10-100	39	94	0,72	0,091	0,50-0,94	0,025±0,26 n=15
Roda Gauge	80-1.080	1	66	0,77	0,055	0,58-0,86	
Уровни рек и озер	44-176	4	13	0,71	0,082	0,59-0,85	0,07±0,08* n=65
Количество осадков	24-211	39	173	0,70	0,088	0,46-0,91	
Годичные донные отложения							
Озеро Саки	50-2.000	1	114	0,69	0,064	0,56-0,87	-0,07±0,11 n=39
Моев и Тамискаминг	50-1.200	2	90	0,77	0,094	0,50-0,95	
Коринтос и Хейлибери	50-650	2	54	0,77	0,098	0,51-0,91	
Температура	29-60	18	120	0,68	0,087	0,46-0,92	
Давление	29-96	8	28	0,63	0,070	0,51-0,76	
Число солнечных пятен	38-190	1	15	0,75	0,056	0,65-0,85	
Годовые кольца и еловый индекс	50-900	5	105	0,79	0,076	0,56-0,94	
Суммарные и средние значения разделов							
Водная статистика		83	346	0,72	0,08	0,46-0,94	
Годичные донные отложения		5	258	0,74	0,09	0,50-0,95	
Метеорология и деревья		32	268	0,72	0,08	0,46-0,94	
Итоговые суммарные и средние значения	10-2,000	120	872	0,726	0,082	0,46-0,95	

*Также включает сливы реки. Из работы Х. Е. Херста "Долгосрочная вместимость водохранилищ", Труды Американского общества гражданских инженеров, 116 (1951).

4.Измерение памяти – процесс Херста и R/S анализ

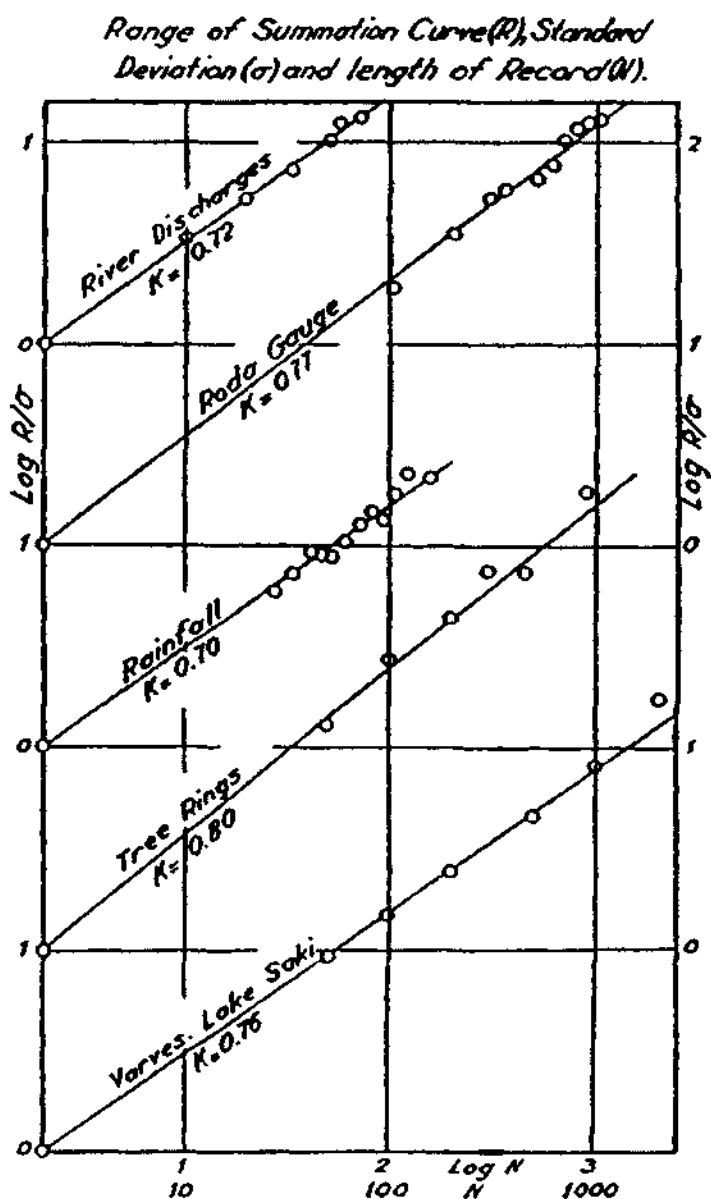


РИСУНОК 4.1 R/S-анализ Херста (Hurst, 1951).

Во всех случаях Херст обнаружил, что H больше 0,50. Его заинтриговал тот факт, что H часто принимало значение, приблизительно равное 0,70. Могло ли это быть некоторым универсальным явлением? Херст решил это выяснить.

ЭФФЕКТ ДЖОКЕРА

До прихода эры компьютеров прикладным математикам нужна была большая сила духа. Численные эксперименты, которые мы с такой легкостью проводим на персональных компьютерах или на автоматизированных рабочих местах, отнимали особенно много времени и имели склонность к ошибкам. Херст чувствовал, что его результаты были вызваны смещенными случайными блужданиями, но ему требовался некоторый метод моделирования. Он изобрел изящный процесс, который служит превосходной метафорой для процесса Херста. Этот процесс был описан Федером (Feder, 1988), Мандельбротом (Mandelbrot, 1982) и Петерсом (Peters, 1989,

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

1991a), но так как я чувствую, что понимание явлений Херста связано с методом моделирования, я повторяю их здесь в сокращенной форме. Хотя я ввожу некоторую дополнительную информацию, читатели, знакомые с моей более ранней работой, могут перейти к следующему разделу. Для тех читателей, которые незнакомы с явлениями Херста, этот раздел является очень важным.

Херст симитировал вероятностный процесс, используя вероятностную колоду карт, то есть колоду с 52 картами, которые были помечены числами ± 1 , ± 3 , ± 5 , ± 7 и ± 9 для приближения к нормальному распределению. Он перетасовывал эту колоду и, отмечая число повторных снятий колоды, создал случайный временной ряд. Выполнение R/S-анализа на полученном ряду привело к показателю Херста, равному приблизительно 0,50. Он достаточно близко соответствовал стандартам того времени. Херст выполнил 1 000 испытаний и обнаружил, что наклон немного изменился.

Чтобы имитировать смещенные случайные блуждания, он сначала перетасовывал колоду и снимал ее один раз, отмечая число с открытой карты. Для примера, мы будем использовать +3 как первоначально выпавшее число. Он возвращал эту карту на место и повторно перетасовывал колоду. Затем он раскладывал карты на две колоды по 26 карт, которые мы назовем колодами А и Б. Поскольку первой была снята карта с числом +3, он перекладывал три старшие карты из колоды А в колоду Б. Затем он убирал три самых младшие карты из колоды Б. Колода Б теперь имела смещение +3. Наконец, он добавлял джокера в колоду Б, после чего она перетасовывалась. Затем он использовал колоду Б со смещением в качестве генератора временного ряда до тех пор, пока он не снимал джокера. После этого Херст создавал новую колоду со смещением.

Херст провел 1 000 испытаний на 100 колодах. Он вычислил, что $H = 0,72$, что приблизительно соответствовало тому значению, которое он получил в итоге природных наблюдений. Подумайте о задействованном процессе: сначала – смещение каждой колоды, которое определяется случайным снятием колоды; затем – порождение самого временного ряда, что также является другим рядом случайных снятий колоды; и, наконец – появление джокера, что опять происходит случайным образом. Несмотря на все эти случайные события, неизменно получалось $H = 0,72$. И снова мы имеем локальную случайность и глобальную структуру, что очень похоже на игру хаоса, описанную в Главе 1. В данном случае это скорее глобальная статистическая, а не геометрическая структура.

Если рынки являются процессами Херста, они проявляют тенденции, которые сохраняются, пока не появляется экономический эквивалент джокера, который изменяет смещение по величине, направлению или в том и другом плане.

СЛУЧАЙНОСТЬ И ПЕРСИСТЕНТНОСТЬ: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ХЕРСТА

Согласно первоначальной теории $H = 0,50$ подразумевало бы независимый процесс. Важно понять, что R/S-анализ не требует, чтобы основной процесс был гауссов, он требует только, чтобы он был независим. Это, конечно, включало бы нормальное распределение, но также и негауссовы независимые процессы наподобие

4. Измерение памяти – процесс Херста и R/S анализ

t-Стюдента, гаммы или любой другой формы. R/S-анализ является непараметрическим, поэтому он не содержит требования к форме лежащего в основе распределения.

$0,50 < H \leq 1,00$ подразумевает *персистентный* временной ряд, а персистентный временной ряд характеризуется эффектами долговременной памяти. Теоретически, то, что происходит сегодня, воздействует на будущее. В терминах хаотической динамики существует чувствительная зависимость от начальных условий. Такая долговременная память имеет место независимо от масштаба времени. Все ежедневные изменения соотнесены со всеми будущими ежедневными изменениями; все еженедельные изменения соотнесены со всеми будущими еженедельными изменениями. *Не существует характерного масштаба времени*, ключевой характеристики фрактального временного ряда.

$0 \leq H < 0,50$ означает *антиперсистентность*. Антиперсистентная система проходит *меньшее* расстояние, чем случайная система. Чтобы система прошла меньшее расстояние, она должна меняться чаще, чем вероятностный процесс. Традиционные теоретики приравнивали бы это поведение к процессу, который является возвратным к среднему. Тем не менее, это предполагает, что изучаемая система имеет устойчивое среднее. Мы не можем сделать такое предположение.

Как мы видели, персистентный временной ряд является самым распространенным типом, встречающимся в природе. Мы также увидим, что он является самым распространенным типом на рынках капитала и в экономике. Для оценки этого утверждения мы должны обратиться к более практическим вопросам, то есть к вычислениям.

R/S-АНАЛИЗ: РУКОВОДСТВО ШАГ ЗА ШАГОМ

R/S-анализ является простым процессом, который требует переработки большого количества данных. В этом разделе уравнения с (4.2) по (4.8) представлены в виде ряда выполнимых шагов. В Приложении 2 содержится программа на языке GAUSS. Вот эти последовательные шаги:

1. Начните с временного ряда длины M . Преобразуйте его во временной ряд длины $N = M - 1$ из логарифмических отношений:

$$N_i = \log(M_{(i+1)}/M_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, (M - 1) \quad (4.9)$$

2. Разделите этот период времени на A смежных подпериодов длины n , так что $A * n = N$. Пометьте каждый подпериод I_a с учетом того, что $a = 1, 2, 3, \dots, A$. Каждый элемент в I_a помечен $N_{k,a}$ при этом $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Для каждого I_a длины n среднее значение определяется как:

$$e_a = (1/n) * \sum_{k=1}^n N_{k,a} \quad (4.10)$$

где e_a = среднее значение N_i , содержащегося в подпериоде I_a длины n .

3. Временной ряд накопленных отклонений ($X_{k,a}$) от среднего значения для

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

каждого подпериода I_a определяется как:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a) \quad (4.11)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

4. Диапазон определяется как максимальное значение за вычетом минимального значения $X_{k,a}$ в пределах каждого подпериода I_a :

$$R_{I_a} = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}) \quad (4.12)$$

где $1 \leq k \leq n$.

5. Выборочное стандартное отклонение, рассчитываемое для каждого подпериода I_a :

$$S_{I_a} = ((1/n) * \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a^2))^{0,50}$$

6. Каждый диапазон R_{I_a} теперь нормализуется путем деления на соответствующий S_{I_a} . Поэтому повторно нормированный размах в течение каждого I_a подпериода равен R_{I_a}/S_{I_a} . В шаге 2 выше мы получили смежные подпериоды длины n . Следовательно, среднее значение R/S для длины n определяется как:

$$(R/S)_n = (1/A) * \sum_{a=1}^A (R_{I_a} / S_{I_a}) \quad (4.13)$$

7. Длина n увеличивается до следующего более высокого значения, а $(M - 1)/n$ является целочисленным значением. Мы используем значения n , включающие начальные и конечные точки временного ряда, и шаги 1 - 6 повторяются до $n = (M - 1)/2$. Теперь мы можем применить уравнения (4.7) и (4.8), выполняя простую регрессию методом наименьших квадратов на $\log(n)$ как независимой переменной и $\log(R/S)_n$ как зависимой переменной. Отрезок, отсекаемый на координатной оси, является оценкой $\log(c)$, константой. Наклон уравнения является оценкой показателя Херста H .

В последующих главах мы более подробно рассмотрим другие практические вопросы. Пока мы добавим еще одно эмпирическое правило: вообще, стройте регрессию для значений $n \geq 10$. Небольшие значения n производят нестабильные оценки при небольших размерах выборки. При рассмотрении критериев значимости в Главе 5 мы увидим другие эмпирические правила.

ПРИМЕР: ОБМЕННЫЙ КУРС ИЕНА/ДОЛЛАР

В качестве первого примера R/S-анализ был применен к ежедневному обменному курсу иена/доллар с января 1972 г. по декабрь 1990 г. К сожалению,

4.Измерение памяти – процесс Херста и R/S анализ

авторегрессионный (AR) процесс может сместить показатель Херста H по причинам, приведенным в Главе 5. Поэтому мы использовали AR(1)-разности изменения валютного курса; то есть мы преобразовали ряд первоначальных данных следующим способом:

$$A_t = Y_t - (a + b \cdot Y_{(t-1)})$$

где A_t = новое значение при времени t

Y_t = изменение обменного курса иена/доллар во времени t

a, b = константы

Начиная с A_t , мы использовали шаг 2, приведенный выше, и вычислили значения R/S для различных N . Результаты показаны в Таблице 4.2, а график в логарифмическом масштабе по обеим осям показан на рисунке 4.2. Обратите внимание, что обменный курс иена/доллар производит аномальное значение $H=0,64$.

Таблица 4.2 R/S-анализ

Результат регрессии, иена ежедневно:		
Константа		-0,187
Стандартная ошибка Y (оценка)		0,012
R в квадрате		0,999
Показатель Херста	0,642	
Стандартная ошибка коэф фициента	0,004	
Значимость	5,848	

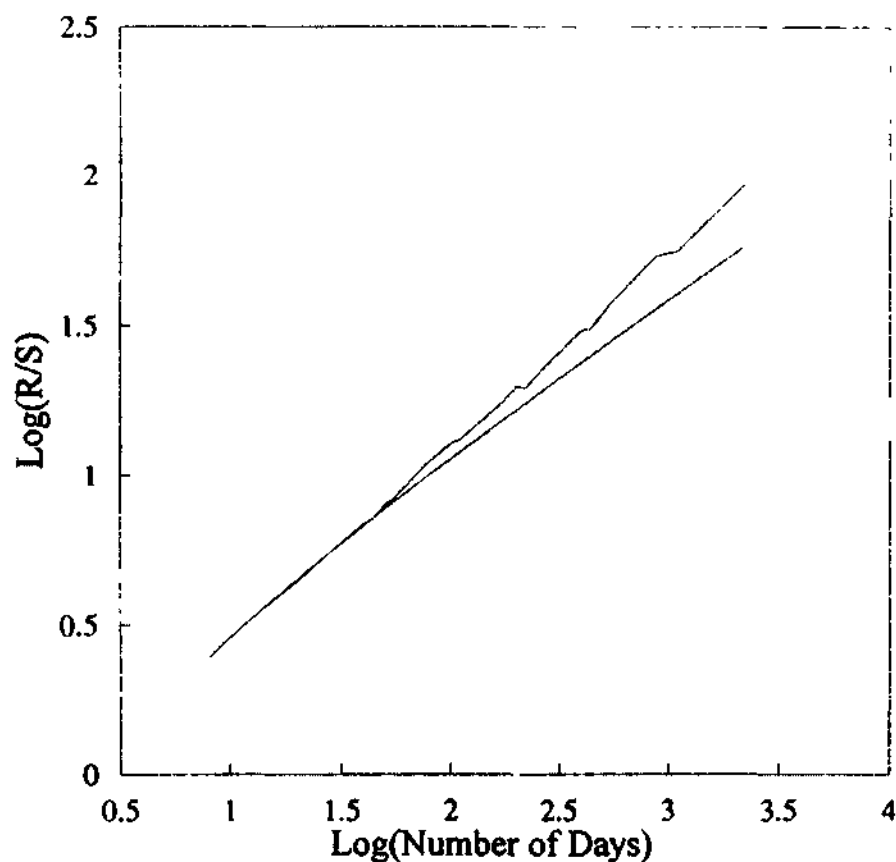


РИСУНОК 4.2 R/S-анализ, ежедневная иена: январь 1972 г. – декабрь 1990 г.

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

Поскольку показатель Херста отличается от 0,50, мы склонны заявить, что обменный курс иена/доллар демонстрирует явления персистентности Херста. Но насколько значим этот результат? Эту значимость было бы трудно оценить без некоторого рода асимптотической теории. К счастью, мы разработали критерии значимости, и они являются темой Главы 5.

5

Проверка R/S-анализа

При анализе любого процесса мы всегда сталкиваемся с одним важным вопросом: "Откуда мы знаем, что мы не получили наши результаты случайно?" Мы знаем по опыту или по рассказам других, что случаются "причудливые" вещи – невероятные события действительно происходят. Случайные события, даже те, которые являются очень маловероятными, называются *тривиальными*. В статистике результаты проверяются на вероятность того, что они могут быть тривиальными. Если они происходят только в течение 5 процентов времени или меньше, мы говорим, что мы уверены на 95 процентов, что они не произошли случайно и являются *значимыми*. Мы говорим, что все же существует 5-процентный шанс того, что это событие действительно произошло случайно, но мы в высокой степени *уверены*, что результаты являются значимыми и сообщают нам какую-то важную информацию об изучаемом процессе. Проверка значимости в отношении вероятностных доверительных интервалов стала одной из главных тем статистики.

Следовательно, для оценки значимости R/S-анализа нам также нужны испытания на надежность наших результатов, очень схожие с "t-статистикой" линейной регрессии. R/S-анализ используется уже в течение нескольких лет, но полную статистическую оценку результатов получить было трудно. Используя мощные персональные компьютеры, теперь мы можем использовать имитации для вычисления ожидаемого значения R/S-статистики и показателя Херста. При объединении этих имитаций с ранее разработанной асимптотической теорией можно оценить значимость наших результатов. Для этого мы сначала исследуем поведение R/S-анализа тогда, когда изучаемая система является независимой, случайной системой. После того как мы полностью исследовали ожидаемые результаты для случайной системы, мы можем сравнить другие процессы со случайной нулевой гипотезой и измерить их значимость.

В этой главе прослеживается историческое развитие случайной нулевой гипотезы, развитие полных испытаний и в заключение дается руководство по применению.

СЛУЧАЙНАЯ НУЛЕВАЯ ГИПОТЕЗА

Проверка гипотезы постулирует наиболее вероятный результат в качестве возможного ответа. Если мы не понимаем механики определенного процесса, например, фондового рынка, то статистическая структура, которая является независимой и идентично распределенной (IID) и характеризуется случайными блужданиями – наше лучшее первое предположение. Структура является гауссовой, и ее распределение плотности вероятности является нормальным распределением, или колоколообразной кривой. Это первоначальное предположение называют *нулевой*

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

гипотезой. Мы выбрали гауссов случай в качестве нулевой гипотезы, потому что с математической точки зрения легче проверить, является ли процесс случайным блужданием и иметь возможность сказать, что он таковым не является, чем доказать существование дробного броуновского движения (или какого-то иного процесса с долговременной памятью). Почему? Гауссов случай позволяет находить оптимальные решения и легко моделируется. Кроме того, в основе гипотезы эффективного рынка (EMH) лежит гауссов случай, который по умолчанию становится нулевой гипотезой.

Херст (1951) основывал свою нулевую гипотезу на биномиальном распределении и подбрасывании монет. Его результат для случайных блужданий – частный случай уравнения (4.7):

$$(R/S)_n = (n * \pi / 2)^{0.50} \quad (5.1)$$

где n = количество наблюдений

Феллер (Feller, 1951) пришел к схожему результату, но он работал строго с откорректированным диапазоном R' . Херст постулировал уравнение (5.1) для нормированного размаха, но оно фактически не было доказано в формальном смысле. Феллер работал с откорректированным диапазоном (то есть накопленные отклонения с удаленным выборочным средним) и пришел к ожидаемому значению R' и его дисперсии. Нормированный размах, R/S , считался трудноразрешимым из-за поведения выборочного стандартного отклонения, особенно для небольших значений N . Существовало мнение, что результат был достаточно близок, так как откорректированный диапазон мог быть решен и должен был асимптотически (то есть в бесконечности) быть эквивалентным нормированному размаху.

Феллер (1951) вывел следующие формулы, которые были, по существу, идентичны уравнению Херста (5.1) для ожидаемого значения откорректированного диапазона, а также вычислил его дисперсию:

$$E(R'(n)) = (n * \pi / 2)^{0.50} \quad (5.2)$$

$$\text{Var}(E(R'(n))) = (\pi^2 / 6 - \pi / 2) * n \quad (5.3)$$

Формула дисперсии, уравнение (5.3), задает дисперсию для одного значения $R'(n)$. Поскольку мы можем ожидать, что значения R/S случайного числа будут нормально распределенными (позднее мы покажем это посредством имитации), по мере увеличения числа выборок дисперсия $R'(n)$ уменьшится. Например, если мы имеем временной ряд, который состоит из $N = 5\,000$ наблюдений, у нас есть 100 независимых выборок $R'(50)$, если мы используем непересекающиеся периоды времени. Поэтому ожидаемая дисперсия нашей выборки будет $\text{Var}(E(R'(n)))/100$, как показано в элементарной статистике.

Уравнения (5.1) и (5.2) – стандартные предположения согласно нулевой гипотезе броуновского движения. Диапазон увеличивается как квадратный корень из времени. Херст пошел немного далее и предположил, что нормированный размах также увеличивается с квадратным корнем из времени. Феллер также говорил, что дисперсия диапазона увеличивается линейно со временем. Ни один из результатов не является особенно удивительным, если учесть наши рассуждения в Главе 4. Тем не менее, теперь у нас есть доступ к инструментам, которые, в частности, Херст, считал бы очень полезными.

Моделирование методом Монте-Карло

Инструментом, облегчившим работу, стал персональный компьютер. Благодаря генераторам случайных чисел мы можем использовать процесс, описанный в Главе 4, особенно уравнения (4.7) и (4.8), и смоделировать много выборок значений R/S. Мы можем вычислить средние значения и дисперсии опытным путем и определить, соответствуют ли они уравнениям (5.1), (5.2) и (5.3). Этот процесс представляет собой моделирование широко известным методом "Монте-Карло", которое особенно подходит для проверки гауссовой гипотезы.

Прежде чем мы начнем, мы должны разобраться с мифом о "случайных числах". Ни один генератор случайных чисел не производит истинные случайные числа. Вместо них алгоритм производит *псевдослучайные* числа – числа, которые являются статистически независимыми согласно большинству гауссовых признаков. Эти псевдослучайные числа фактически имеют длинный цикл, или память, после которого они начинают повторяться. Как правило, циклы достаточно длинны для того, чтобы повторение не обнаруживалось. Недавно, однако, было найдено, что псевдослучайные числа могут исказить результаты, когда большие количества данных используются в моделированиях по методу Монте-Карло. Обычно мы не сталкиваемся с этой проблемой в финансовой экономике. Однако многие из алгоритмов, используемых в качестве генераторов случайных чисел, являются версиями хаотических систем. R/S-анализ особенно хорошо справляется с раскрытием детерминированного хаоса и процессов с долговременной памятью. Поэтому чтобы гарантировать случайность наших испытаний, все ряды случайных чисел в этой книге перед использованием перемешиваются согласно двум другим рядам псевдослучайных чисел. Этот метод не устраняет всю зависимость, но сводит ее к фактически неизмеримым уровням, даже для R/S-анализа.

Мы начнем с ряда псевдослучайных чисел, содержащего 5 000 значений (нормально распределенных с нулевым средним и стандартным отклонением равным единице), которые дважды перемешиваются. Мы вычисляем значения R/S для всех n , которые являются ровно делимыми на 5 000; то есть каждое значение R/S_n будет всегда включать начальное и конечное значение полного временного ряда. Затем мы повторяем этот процесс 300 раз, так чтобы у нас было 300 значений R/S_n для каждого n . Среднее этих R/S_n – ожидаемое значение $E(R/S_n)$ для системы гауссовых случайных чисел. Рассчитываются дисперсии, и конечные значения сравниваются со значениями, полученными с использованием уравнений (5.1), (5.2) и (5.3). Результаты показаны в таблице 5.1 и графически изображены на рисунке 5.1.

Смоделированные значения R/S_n стремятся к значениям, полученным в уравнениях (5.1) и (5.2), когда n больше 20. Однако для меньших значений n существует согласованное отклонение. Значения R/S_n , созданные моделированием, систематически ниже значений, полученных в уравнениях Феллера и Херста. Дисперсии R/S_n были также систематически ниже, чем уравнение Феллера (5.3). Херст, тем не менее, знал, что он вычисляет асимптотическое отношение, то есть такое отношение, которое будет верным только для большого n . Феллер также знал это. Нормирование представляло еще одну проблему.

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

Таблица 5.1 Оценки значений $\log(R/S)$

Число наблюдений	Монте-Карло	Херст	Энис и Плойд (1976)	Эмпирическая поправка
10	0,4577	0,5981	0,4805	0,4582
20	0,6530	0,7486	0,6638	0,6528
25	0,7123	0,7970	0,7208	0,7120
40	0,8332	0,8991	0,8382	0,8327
50	0,8891	0,9475	0,8928	0,8885
100	1,0577	1,0981	1,0589	1,0568
125	1,1097	1,1465	1,1114	1,1097
200	1,2190	1,2486	1,2207	1,2196
250	1,2710	1,2970	1,2720	1,2711
500	1,4292	1,4475	1,4291	1,4287
625	1,4801	1,4960	1,4795	1,4792
1.000	1,5869	1,5981	1,5851	1,5849
1.250	1,6351	1,6465	1,6349	1,6348
2.500	1,7839	1,7970	1,7889	1,7888
Средне квадратическая сшибка:		0,0035	0,0001	0,0000

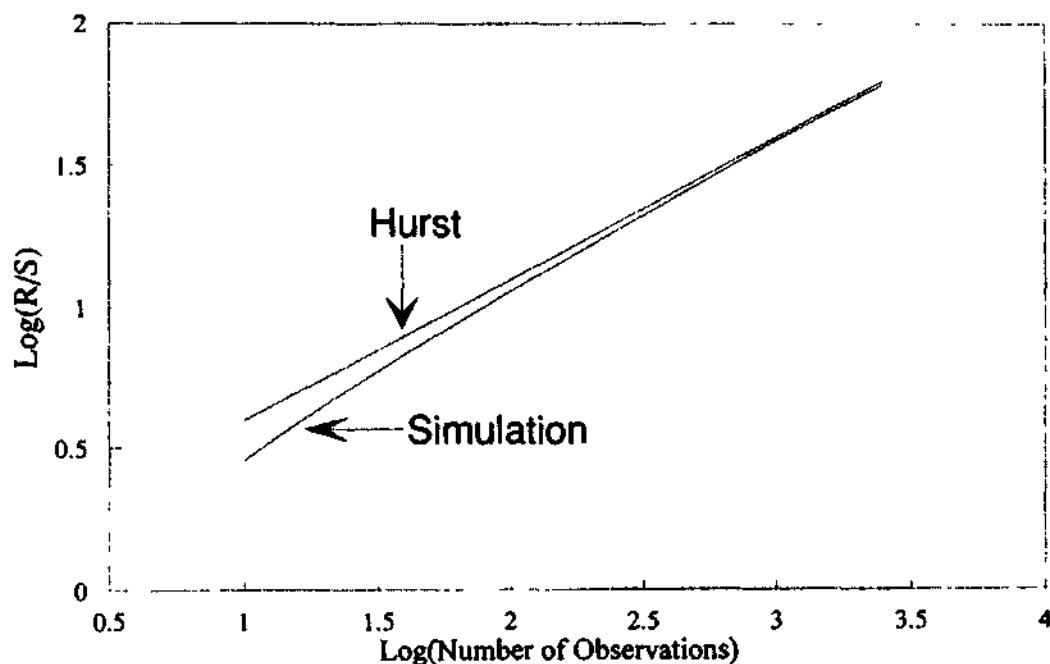


РИСУНОК 5.1 Значения R/S, моделирование методом Монте-Карло против уравнения Херста.

Феллер работал с откорректированным диапазоном, а не с нормированным размахом. Соотносилось ли масштабное поведение стандартного отклонения с диапазоном для маленьких значений n , вызывавшем это отклонение? Факт остается фактом – среднее значение R/S-статистики весьма отличается от значения, предсказанного в соответствии с теорией Феллера.

Много лет спустя Энис и Ллойд (1976) вывели следующее уравнение, чтобы обойти систематическое отклонение R/S-статистики для небольшого n:

$$E(R/S_n) = [\Gamma\{0,5*(n-1)\} / (\sqrt{\pi} * \Gamma(0,5*n))] * \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r} \quad (5.4)$$

Вывод этого уравнения выходит за рамки данной книги. Те, кто интересуется выводом этого уравнения, могут найти его в книге Эниса и Ллойда (Anis and Lloyd, 1976). Для больших значений n уравнение (5.4) становится менее полезным, потому что значения гаммы становятся слишком большими для памяти большинства персональных компьютеров. Тем не менее, благодаря использованию функции Стерлинга уравнение может быть упрощено к следующему виду:

$$E(R/S_n) = (n * \pi / 2)^{-0,50} * \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) может использоваться, когда $n > 300$. По мере того, как n становится больше, уравнение (5.5) приближается к уравнению (5.2). Уравнения (5.4) и (5.5) приспособляются для распределения дисперсии нормального распределения, чтобы следовать за распределением гаммы; то есть стандартное отклонение изменяет масштаб медленнее, чем диапазон для небольших значений n. Следовательно, нормированный размах будет изменять масштаб быстрее (H будет больше 0,50), когда n имеет небольшие значения. Мандельброт и Уоллис (1969a,b,c) называли область небольшого n "переходной", потому что n не было достаточно большим для наблюдения надлежащего поведения. Однако в экономике редко имеется достаточно исходных точек, чтобы отказаться от меньших n: иногда это все, что мы имеем. Мандельброт и Уоллис не начинали исследование поведения масштабирования до $H = 20$. Теоретически ожидалось, что формула Эниса и Ллойда объяснит поведение, наблюдаемое при экспериментах методом Монте-Карло. Результаты приведены в таблице 5.1 и на рисунке 5.2.

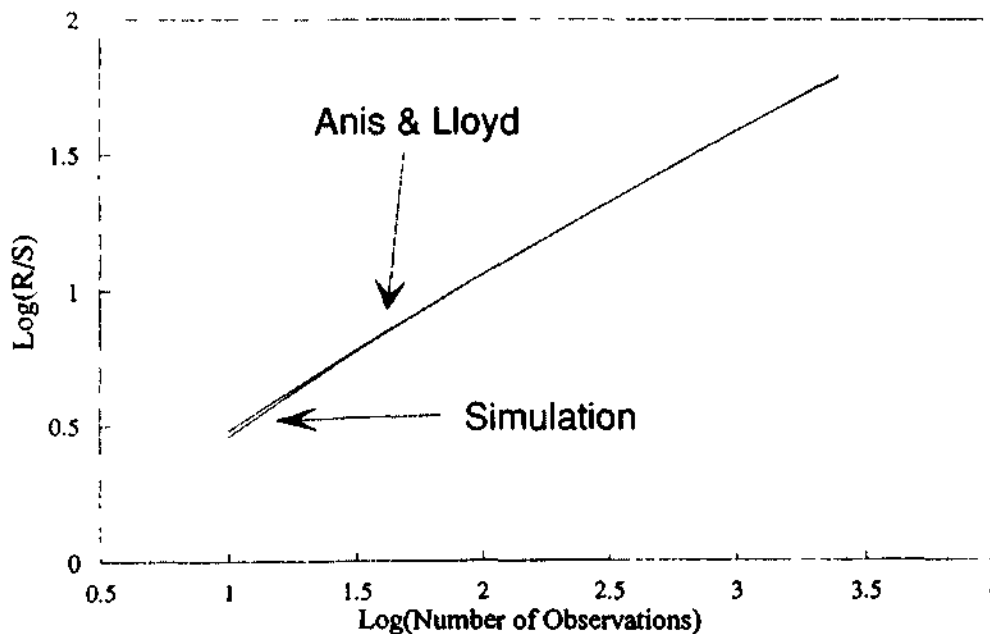


РИСУНОК 5.2 Значения R/S, моделирование методом Монте-Карло против уравнения Эниса и Ллойда.

Таблица 5.2 Оценки значений $\log(R/S)$

Число наблюдений	Перемешанный индекс S&P 500	Монте-Карло
10	0,4531	0,4577
20	0,6474	0,6530
25	0,7035	0,7123
50	0,8812	0,8891
100	1,0472	1,0577
125	1,1012	1,1097
250	1,2591	1,2710

Существует некоторое продвижение, но уравнения (5.4) и (5.5) все еще производят значения R/S для небольшого n, которые выше выборочных значений.

Кроме того, существует возможность того, что результаты вызваны смещением, происходящим в генераторе псевдослучайных чисел, которое не уменьшается при двойном перемешивании. Возможно, объем выборки 300 все еще недостаточен. Для проверки смещения выборки использовался независимый ряд чисел. Этот ряд составляли 500 ежемесячных изменений индекса S&P 500, нормализованных к нулевому среднему и единичной дисперсии. Перед началом эксперимента эти числа перемешивались 10 раз. Затем они беспорядочно перемешивались 300 раз, и вычислялись значения R/S, как и прежде. Результаты приведены в таблице 5.2. Они фактически неотличимы от гауссова генерированного ряда. Результаты еще более замечательны, когда мы полагаем, что рыночные прибыли не являются обычно распределенными; они имеют толстые хвосты и высокий пик в среднем значении, даже после перемешивания. Судя по этим результатам, мы можем сказать, что в формуле Эниса и Ллойда чего-то не хватает для значений n меньше 20. Чего в ней не хватает – неизвестно. Тем не менее, опытным путем я смог вывести поправку к формуле Эниса и Ллойда. Эта поправка умножает (5.4) и (5.5) с поправочным коэффициентом и дает:

$$E(R/S_n) = ((n - 0,5)/n) * (n * \pi / 2)^{-0,50} * \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r} \quad (5.6)$$

Результаты этой поправки, полученной опытным путем, показаны в Таблице 5.1 и на рисунке 5.3. Поправка очень близко подходит к смоделированным значениям R/S. Начиная с этого момента, все ожидаемые значения R/S согласно случайной нулевой гипотезе будут генерироваться с использованием уравнения (5.6).

Ожидаемое значение показателя Херста

Используя результаты уравнения (5.6), теперь мы можем произвести ожидаемые значения показателя Херста. Судя по таблице 5.1 и рисунку 5.3, мы можем ожидать, что показатель Херста будет значительно выше 0,50 для значений меньше 500, что снова показывает, что $H = 0,50$ для независимого процесса является асимптотическим пределом. Ожидаемый показатель Херста будет, конечно, изменяться в зависимости от

значений n , которые мы используем для построения регрессии. Теоретически, будет подходить любой диапазон, пока изучаемая система и ряд $E(R/S)$ охватывают одинаковые значения n . В соответствии с основной целью этой книги, которой является финансовая экономика, мы начнем с $n = 10$. Конечное значение n будет зависеть от исследуемой системы. В работе (Peters, 1991a) было обнаружено, что ежемесячные прибыли S&P 500 имеют постоянное масштабирование для $n < 50$ месяцев, при этом $H = 0,78$. Как показано на рисунке 5.4, $E(H)$ равно 0,613 для $10 \leq n \leq 50$, что является значительно более низким значением – по крайней мере, оно выглядит значительно более низким. Но действительно ли это так?

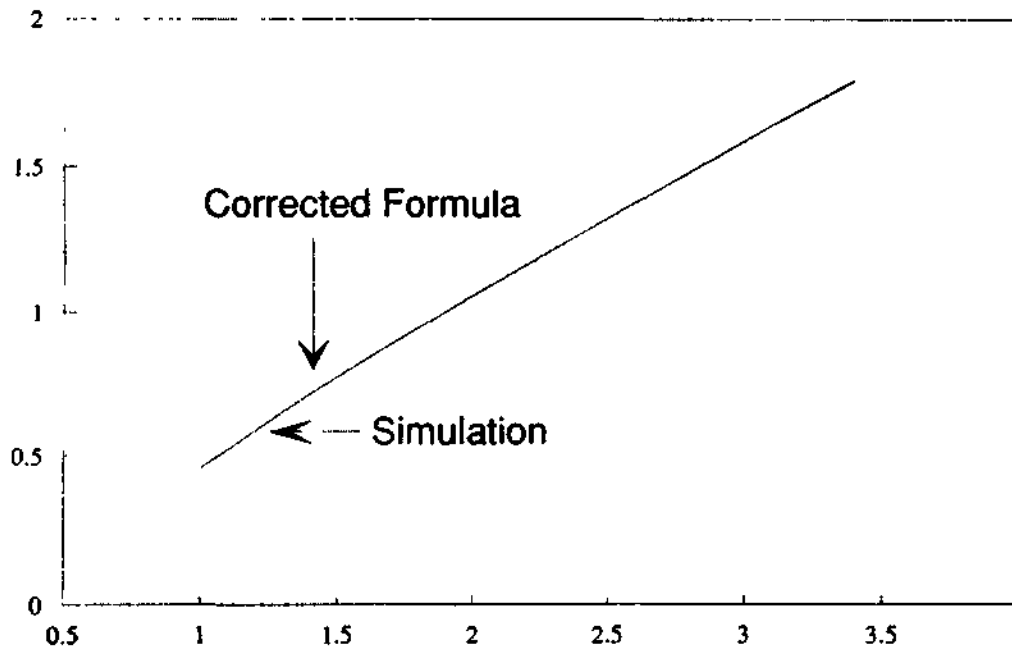


РИСУНОК 5.3 Значения R/S, моделирование методом Монте-Карло против исправленного уравнения Эниса и Ллойда.

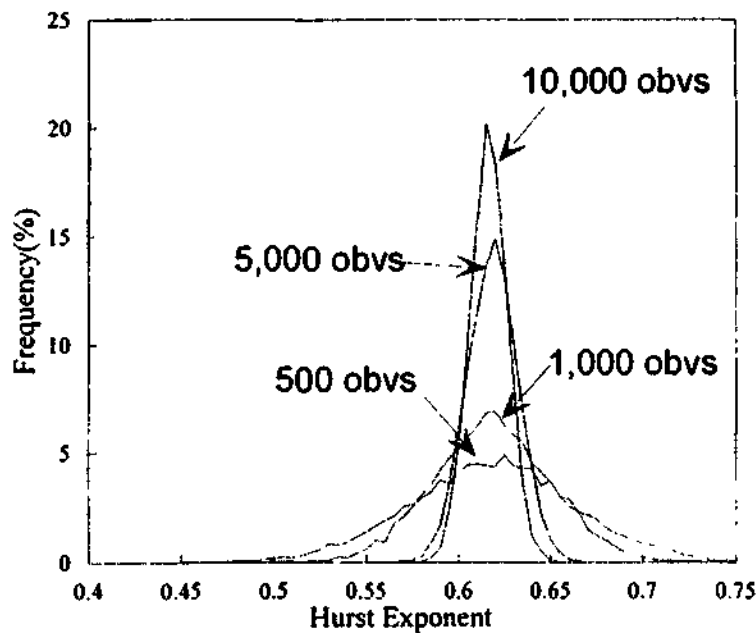


РИСУНОК 5.4 $E(H)$ для $10 < n < 50$, ненормализованная частота в процентах.

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

Поскольку значения R/S – случайные переменные, нормально распределенные, можно было бы ожидать, что значения H также будут нормально распределенными. В таком случае ожидаемая дисперсия показателя Херста была бы следующей:

$$\text{Var}(H)_n = 1/T \quad (5.7)$$

где T = общее количество наблюдений в выборке

Это было бы дисперсией вокруг $E(H)_n$, как рассчитано из $E(R/S)_n$. Обратите внимание, что $\text{Var}(H)_n$ не зависит от n или H , но, вместо этого, зависит от полного объема выборки T .

Еще раз повторим, что эксперименты методом Монте-Карло проводились для проверки истинности уравнения (5.7). Для нормально распределенной случайной переменной, дважды перемешанной, 7 000 значений H были рассчитаны для $10 \leq n \leq 50$. Моделирование было проведено для $T = 200, 500, 1\,000$ и $5\,000$. Результаты приведены в Таблице 5.3:

1. Средние значения H соответствуют $E(H)$ с использованием значений $E(R/S)$ из уравнения (5.6), показывая, что эмпирическая поправка к формуле Эниса и Ллойда обоснованна.
2. В каждом случае дисперсия очень близка к $1/T$.

Таблица 5.3 Стандартное отклонение $E(H)$: $10 < n < 50$

Число наблюдений	Смоделированный показатель Херста	Теоретический показатель Херста	Смоделированное стандартное отклонение	Теоретическое стандартное отклонение
200	0,613	0,613	0,0704	0,0704
500	0,615	0,613	0,0451	0,0446
1.000	0,615	0,613	0,0319	0,0315
5.000	0,616	0,613	0,0138	0,0141
10.000	0,614	0,613	0,0101	0,0100

Моделирование было повторено для $10 \leq n \leq 500$, $10 \leq n \leq 1000$ и $10 \leq n \leq 5000$. В каждом случае $E(H)$ соответствовало значению, предсказанному уравнением (5.6), и дисперсия приблизительно равна $1/T$. На основании результатов таблицы 5.1 мы можем сказать, что $E(H)$ для IID случайных переменных может быть рассчитано из уравнения (5.6), с дисперсией $1/T$. На рисунке 5.5 показаны "нормализованные" распределения для различных значений T . Как и ожидалось, они оказываются нормально распределенными.

Что, если независимый процесс отличается от гауссова процесса? Как мы видели в таблице 5.2, независимое распределение с толстыми хвостами и высоким пиком действительно обнаруживает средние значения, как они были предсказаны в уравнении (5.6). Тем не менее, дисперсия все-таки отличается. К сожалению, дисперсия для распределений, которые не являются нормально распределенными, отличается на индивидуальном основании. Поэтому наш доверительный интервал

имеет силу только для IID случайных переменных. Существуют, конечно, способы отфильтровывания краткосрочной зависимости, и в дальнейшем мы будем использовать эти методы.

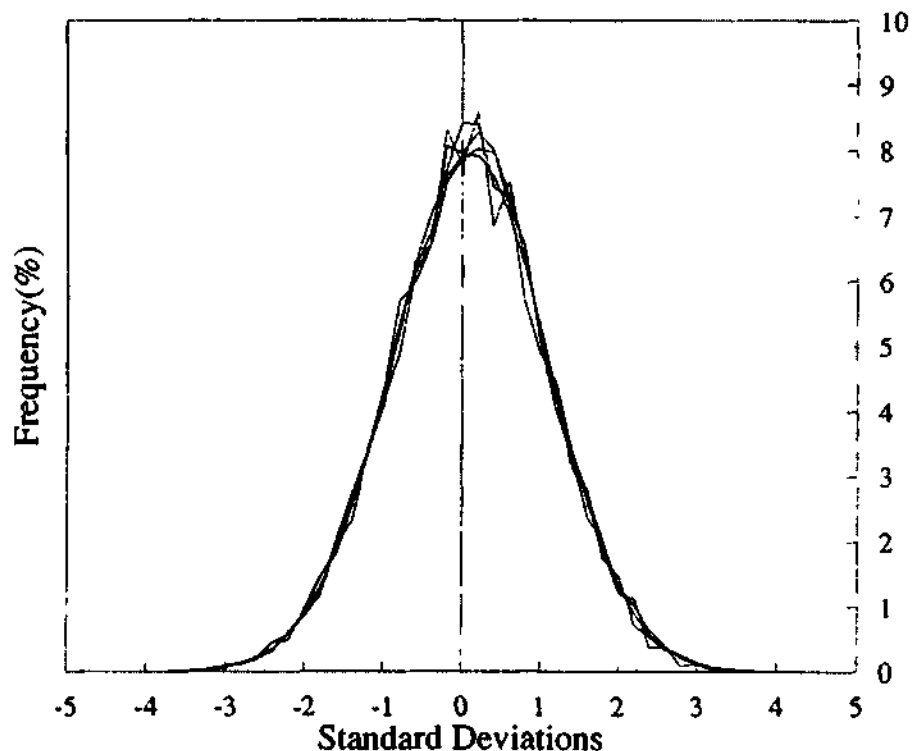


РИСУНОК 5.5 E(H) для $10 < n < 50$, нормализованная частота: $T = 500, 1000, 5000, 10000$.

В следующем разделе исследуется R/S-анализ различных типов временных рядов, которые часто используются в моделировании финансовой экономики, а также других видов стохастических процессов. Особое внимание будет уделяться возможности ошибки второго рода (классификация процесса как имеющего долговременную память, тогда как в действительности, процесс имеет кратковременную память).

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Для финансовых временных рядов были предложены пять основных типов процессов с кратковременной памятью:

1. Авторегрессионные процессы (AR);
2. Процессы скользящего среднего (MA);
3. Авторегрессионные процессы скользящего среднего (ARMA);
4. Авторегрессионные интегрированные процессы скользящего среднего (ARIMA);
5. Авторегрессионные условные гетероскедастические процессы (ARCH).

Каждый из этих процессов имеет ряд вариантов, которые являются улучшениями основных моделей. Эти улучшения пытаются приблизить

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

характеристики временного ряда к фактическим данным. Мы исследуем каждый из этих процессов по очереди, но основное внимание будет уделено основным моделям. Варианты основных моделей будут оставлены для будущего исследования. Кроме того, Мандельбротом (1964, 1972, 1982) был предложен процесс с долговременной памятью, названный дробным броуновским движением. Изучение дробного броуновского движения будет отложено до Главы 13. В таблице 5.4 подводятся итоги следующего раздела.

Таблица 5.4 R/S-анализ стохастических процессов

	H= первоначальный ряд	Значимость	H=AR(1)- разность	Значимость	E(H)	T	n	Испытания
AR(1)	0,669	6,59	0,574	-0,11	0,576	5,000	250	300
MA(1)	0,615	2,76	0,541	-2,49	0,576	5,000	250	300
ARMA(1,1)	0,669	6,59	0,568	-0,51	0,576	5,000	250	300
ARCH	0,618	0,38	0,618	0,38	0,614	8,000	50	1
*GARCH	0,633	1,67	0,635	1,85	0,614	8,000	50	1

* Обобщенный авторегрессионный условный гетероскедастический процесс.

Авторегрессионные процессы

Авторегрессионный процесс – это процесс, в котором изменение переменной в некоторой точке времени является линейно коррелированным с предыдущим изменением. Вообще, корреляция уменьшается экспоненциально со временем и исчезает за относительно короткий период. Отсюда следует общая форма:

$$C_n = e_n + a \cdot C_{n-1} + b \cdot C_{n-2} \quad (5.8)$$

где C_n = изменение C во времени n , $0 \leq C \leq 1$

a, b = константы с $|a| \leq 1, |b| \leq 1$

e = ряд белого шума со средним 0 и дисперсией σ_e^2

Уравнение (5.8) является авторегрессионным процессом порядка 2, или AR(2), поскольку изменение во времени n связано с изменением в последние два периода. Процесс AR(q) возможен там, где изменение C во времени n зависит от предыдущих q периодов. Для проверки вероятности процесса AR строится регрессия там, где изменение во времени n является зависимой переменной, и изменения в предыдущие q периоды (задержки) используются как независимые переменные.

Для каждой задержки оценивается t -статистика. Если любые t -статистики существенны на 5-процентном уровне, то мы можем сформулировать гипотезу о том, что работает AR-процесс. Ограничения диапазона значений для коэффициентов

гарантируют *стационарность* процесса, что означает, что не существует долгосрочной тенденции, на повышение или на понижение, в среднем или дисперсии.

Финансовые временные ряды высокой частоты (изменения происходят ежедневно или несколько раз за день) обычно проявляют значимые авторегрессионные тенденции. Эта особенность является ожидаемой, потому что высокочастотные данные являются, прежде всего, торговыми данными, и трейдеры действительно влияют друг на друга. Почасовые данные, например, могут показать значимость при задержках до десяти часов. Однако как только частота берется в недельных или месячных интервалах, процесс в целом сводится к процессу AR(1) или AR(2). По мере увеличения временного интервала эффект корреляции от торговли уменьшается. Поэтому при таком моделировании мы концентрируемся на процессах AR(1), как определено в уравнении (5.8).

Мы использовали сильный процесс AR(1), где $a = 0,50$. Изменение во времени n также содержит 50 процентов предыдущего изменения. Для значений ϵ были сгенерированы 5 000 случайных переменных и был выполнен R/S-анализ. На рисунке 5.6 показаны результаты с использованием V-статистики. График V-статистики показывает значимый показатель Херста, ожидаемый для процесса с бесконечной памятью типа AR(1).

Мы можем сделать поправку на AR-процесс, взяв AR(1)-разности. Это можно сделать, построив регрессию C_n как зависимой переменной против $C_{(n-1)}$ как независимой переменной. Полученное уравнение даст наклон (a) и отрезок, отсекаемый на оси, (c). Вычисляем AR(1)-разность следующим образом:

$$r_n = C_n - (c + a * C_{n-1}) \quad (5.9)$$

где r_n – AR(1)-разность C во времени n . В уравнении (5.9) мы вычли линейную зависимость C_n на $C_{(n-1)}$. Рисунок 5.6 также показывает график V-статистики временного ряда AR(1)-разностей. Персистентность была сокращена до незначительных уровней.

Если, тем не менее, действует более длинный AR-процесс, то также необходимо учесть разности для более длительных задержек. Такая более длинная структура задержек может быть получена построением регрессии запаздывающих значений и проверкой на значимые отношения, например, с t-статистикой. Однако как долго задержка эквивалентна "долговременной" памяти? Являются ли четыре года месячных прибылей "долговременной" памятью? Я постулирую, что отношение AR(48) для месячных данных является долговременной памятью, а AR(48) для дневных данных – нет. Это умозаключение произвольно, но может быть подтверждено следующим образом. Для большинства инвесторов четырехлетняя память будет эквивалентом долговременной памяти, потому что она выходит далеко за пределы их собственного инвестиционного горизонта. Четырехлетняя память и "бесконечная" память не имеют практической разницы и знание той или иной из них не изменит перспективу таких инвесторов. Тем не менее, поскольку 48-дневная память действительно изменяет восприятие рыночной деятельности инвестором, она является "краткосрочной". Еще раз повторю, отрезок времени важнее количества наблюдений.

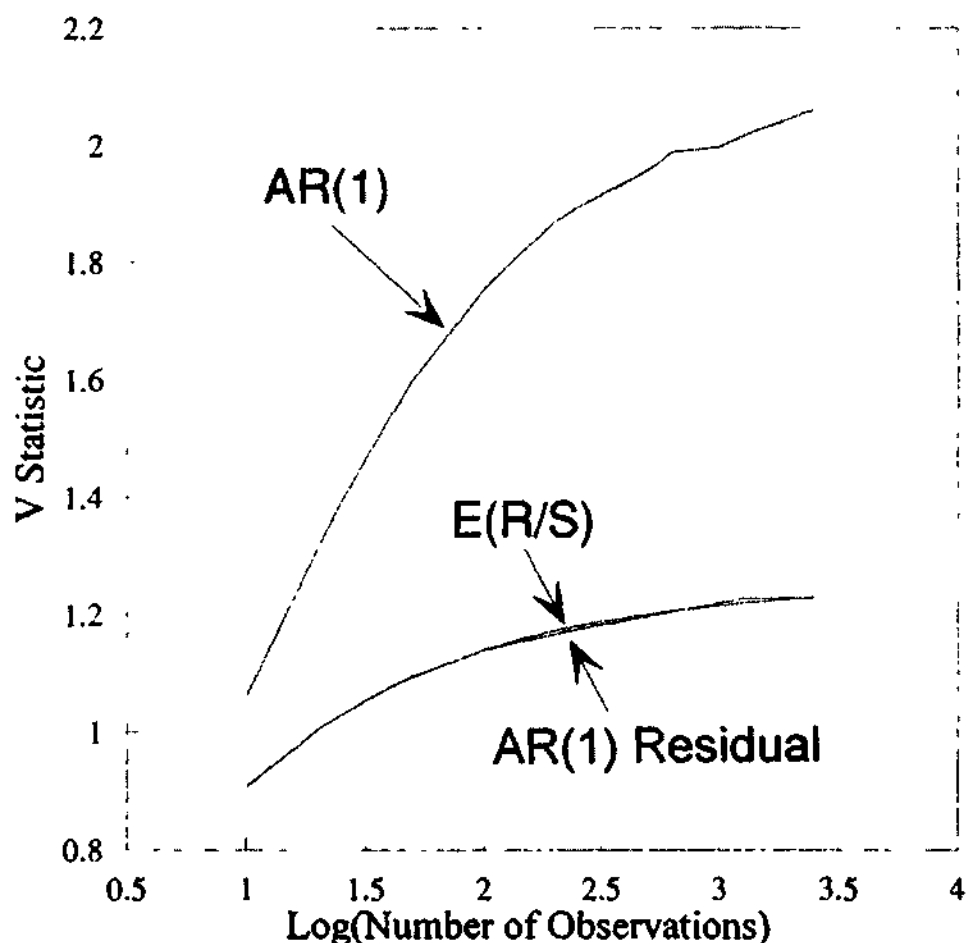


РИСУНОК 5.6 V-статистика, процесс AR(1).

Процессы скользящего среднего

В процессе скользящего среднего (MA), временной ряд – результат скользящего среднего ненаблюдаемого временного ряда:

$$C_n = c * e_{n-1} + e_n \quad (5.10)$$

где e = IID случайная переменная

c = константа, и $|c| < 1$

Ограничение на параметр скользящего среднего, c , гарантирует, что процесс *обратим*. $c > 1$ подразумевает, что (1) будущие события влияют на настоящее, что несколько нереалистично и (2) процесс стационарен. Ограничения на e , случайный шок, заключаются в том, что, подобно AR-процессу, он является IID случайной переменной со средним нулем и дисперсией σ_e^2 .

Наблюдаемый временной ряд C является результатом скользящего среднего ненаблюдаемого случайного временного ряда e . И снова благодаря процессу скользящего среднего существует линейная зависимость от прошлого и эффект кратковременной памяти. Однако, в отличие от процесса AR(1), случайный шок имеет только однопериодную память. На рисунке 5.7 показано, что это может, еще раз,

сместить график в логарифмическом масштабе по обеим осям и привести к значимому значению H . Мы также можем видеть, что использование AR(1)-разностей посредством применения уравнения (5.9) перекорректирует проблему кратковременной памяти и теперь дает значимое антиперсистентное значение H . Это кажется ключом к поведению скользящего среднего; то есть показатель Херста меняется от сильно персистентного до сильно антиперсистентного.

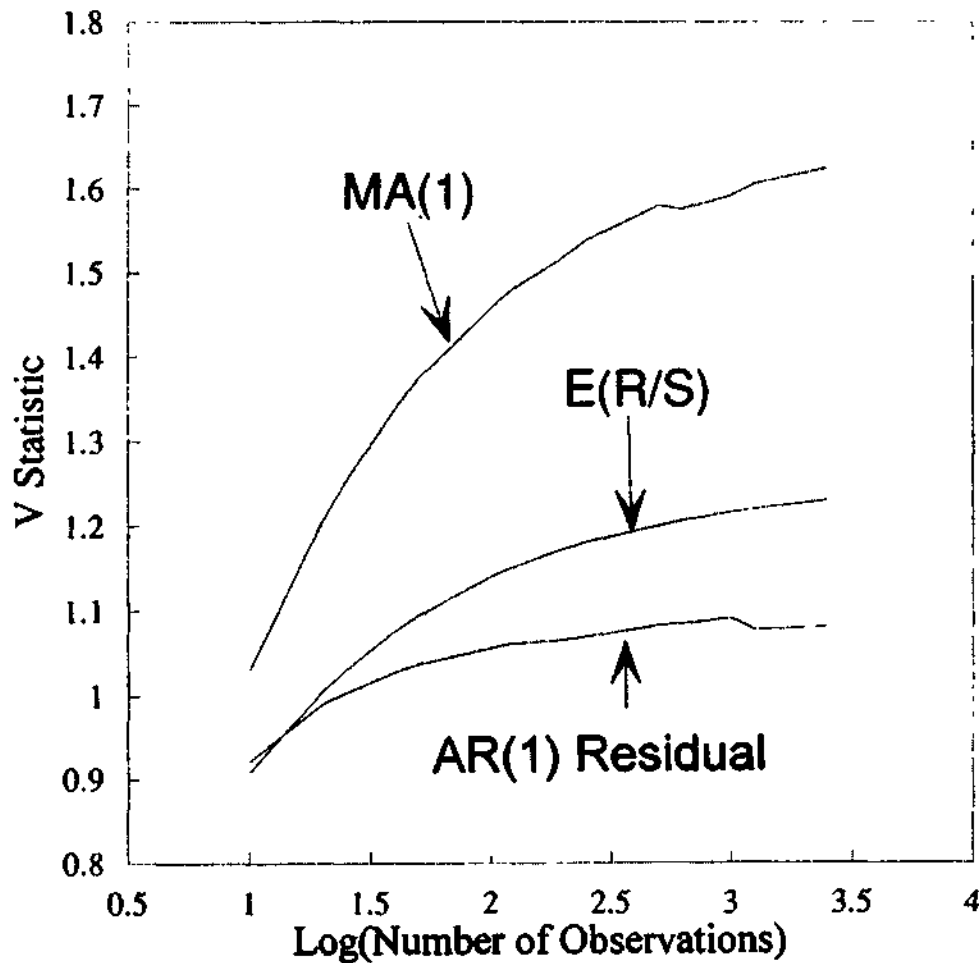


РИСУНОК 5.7 V-статистика, процесс MA(1).

ARMA модели

В этом типе моделей мы имеем дело и с авторегрессией, и со скользящим средним. Скользящее среднее является ненаблюдаемой случайной последовательностью:

$$C_n = a * C_{n-1} + e_t - b * e_{t-1} \quad (5.11)$$

Модели этого типа называются *смешанными моделями* и обычно обозначаются как ARMA (p,q) модели. p – число авторегрессионных членов, а q представляет число членов скользящего среднего; то есть процесс ARMA(2,0) – то же самое, что и процесс AR(2), потому что он не имеет членов скользящего среднего. Процесс ARMA (0,2) – то же самое, что и процесс MA (2), потому что он не имеет авторегрессионных членов.

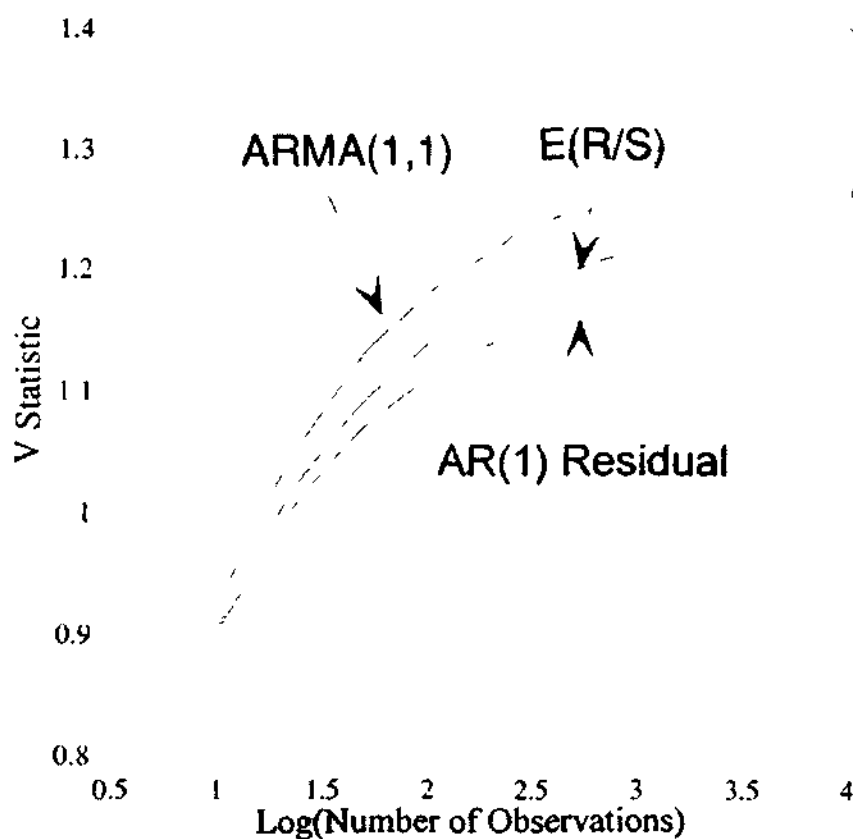


РИСУНОК 5.8 V-статистика, процесс ARMA (1,1).

Рисунок 5.8 показывает, что модель ARMA (1,1) может сместить R/S-анализ, потому что она представляет собой процесс с бесконечной памятью, подобный процессу AR(1), хотя она включает член MA(1). Однако график также показывает, что использование AR(1)-разностей сводит эту проблему к минимуму.

ARIMA модели

И модели AR, и модели ARMA могут быть включены в более общий класс процессов. Авторегрессионные интегрированные модели скользящего среднего (ARIMA) специально используются для временных рядов, которые являются *нестационарным* – эти процессы обладают основной тенденцией в их среднем значении и дисперсии. Однако при использовании последовательных разностей данных результат является стационарным.

Например, ряд цен нестационарен просто потому, что он имеет долгосрочный компонент роста. Он может расти неограниченно, так что сама цена не будет стремиться к среднему значению. Однако для гипотезы эффективного рынка (EMH) общепринятым является тот факт, что изменения в цене (или прибыли) стационарны. Как правило, изменения цены определяются как изменения в процентах или, в данном случае, логарифмические разности. Тем не менее, это – только первая разность. В некоторых рядах для того, чтобы сделать данные стационарными, могут понадобиться разности более высокого порядка. Например, разность разностей – ARIMA процесс второго порядка. Он может достичь более высоких разностей.

Поэтому мы можем сказать, что S является *гомогенным нестационарным*

процессом порядка d , если:

$$w_t = \Delta^d C_t \quad (5.12)$$

является стационарным. Δ представляет собой вычисление разностей, а d представляет собой необходимое количество действий по вычислению разностей. Например:

$$\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$$

$$\Delta^2 C_t = \Delta C_t - \Delta C_{t-1}$$

и т.д.

Если w_t является процессом ARMA(p, q), то C_t считается *интегрированным авторегрессионным процессом скользящего среднего порядка* (p, d, q), или процессом ARIMA(p, d, q). Напомним, что p – число авторегрессионных членов, а q – число членов скользящего среднего. Параметр d относится к числу необходимых действий по вычислению разностей. Нет необходимости смешивать этот процесс. Если C_t – процесс ARIMA($p, d, 0$), то w_t – процесс AR(p). Аналогично, если C_t – процесс ARIMA($0, d, q$), то w_t – MA($0, q$).

Что касается цен, метод, применяемый для придания стационарности процессу – использование AR(1)-разностей. Поэтому здесь не нужны дополнительные моделирования. Однако классическая модель ARIMA(p, d, q) принимает целочисленное вычисление разностей. Смягчая предположение о целом числе, дробное вычисление разностей учитывает широкий диапазон процессов, включая персистентность и антиперсистентность процесса Херста (более подробно обсуждаемые в Главе 13). ARIMA класс обсуждается здесь для полноты исследования и в качестве подготовки к методу дробного вычисления разностей, или моделям ARFIMA.

Модели ARCH

Модели, которые показывают авторегрессионную условную гетероскедастичность (ARCH), стали популярны за прошедшие несколько лет по ряду причин:

1. Они являются семейством нелинейных стохастических процессов, в противоположность линейно-зависимым процессам AR и MA;
2. Их частотное распределение имеет высокий пик и толстые хвосты;
3. Эмпирические исследования показали, что финансовые временные ряды проявляют статистически существенную ARCH.

Но что такое ARCH?

Основная модель ARCH была разработана Инглом (Engle, 1982). Ингл рассматривал временные ряды, которые определялись нормальными распределениями вероятности за исключением зависящих от времени дисперсий; ожидаемая дисперсия процесса зависела от того, каковой она была до этого. Дисперсия, устойчивая для индивидуальных распределений, казалась "изменяющейся"

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

во времени", отсюда и *условная гетероскедастичность* в названии процесса. Процесс также авторегрессивен в том, что он обладает временной зависимостью. Выборочное частотное распределение стало бы средним этих расширяющихся и сокращающихся нормальных распределений. Как таковое, оно было бы распределением с высоким пиком и толстыми хвостами в любой точке времени. Основная модель ARCH была определена следующим образом:

$$\begin{aligned} C_n &= s_n * e_n \\ S_n^2 &= f_0 + f^* e_{n-1}^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

где e = стандартная нормальная случайная переменная

f = константа

Для удобства $f_0 = 1$ и $f = 0,50$ считаются типичными значениями. Мы можем видеть, что модель ARCH схожа с моделями AR, рассмотренными ранее: наблюдаемое значение C снова является результатом ненаблюдаемого ряда e , который зависит от своих прошлых реализаций. Однако модель ARCH нелинейна. Небольшие изменения, вероятно, будут сопровождаться другими небольшими изменениями, а большие изменения – другими большими изменениями, но знак будет непредсказуем. Кроме того, поскольку ARCH нелинейна, большие изменения расширятся, а небольшие изменения сократятся. Это приводит к распределению с толстыми хвостами и высоким пиком.

Модель ARCH была изменена, чтобы придать зависимость от прошлого также и переменной s . Боллерслев (Bollerslev, 1986) формализовал обобщенную модель ARCH (или GARCH) следующим образом:

$$\begin{aligned} C_n &= s_n * e_n \\ S_n^2 &= f_0 + f^* e_{n-1}^2 + g^* S_{n-1}^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

GARCH типично задает $f_0 = 1$, $f = 0,10$ и $g = 0,80$, хотя все три переменные могут варьироваться от 0 до 1. GARCH также создает частотное распределение с толстыми хвостами и высоким пиком. Уравнения (5.13) и (5.14) – основная модель ARCH и модель GARCH; существует много вариаций. Читатели, желающие получить более полную картину, могут обратиться к работе Боллерслева, Чоу и Кронера (Bollerslev, Chou and Kroner, 1990), которые провели превосходное исследование). Расширенные модели ARCH и GARCH точно регулируют характеристики таким образом, чтобы модели лучше соответствовали эмпирическим наблюдениям. Однако для наших целей будет мало изменений в свойствах масштабирования процесса ARCH или GARCH, хотя изменения улучшают теоретические аспекты моделей. Мы исследуем эти другие "улучшения" в Главе 14.

Поскольку основная модель ARCH и модель GARCH имеют много характеристик, которые соответствуют эмпирическим данным, моделируемые значения ARCH и GARCH являются превосходной проверкой R/S-анализа.

На рисунке 5.9 показан график V-статистики для модели ARCH, как описано выше. Модель имеет отличный R/S-спектр, значения которого для короткого

периода времени являются выше ожидаемых, а значения для более длинных периодов времени – ниже ожидаемых. Это подразумевает, что процессы ARCH обладают краткосрочной случайностью и долгосрочной антиперсистентностью. Использование AR(1)-разностей, как оказывается, не затрагивает график. Эта характеристика отражает возвратное к среднему поведение, часто связываемое с основными моделями ARCH.

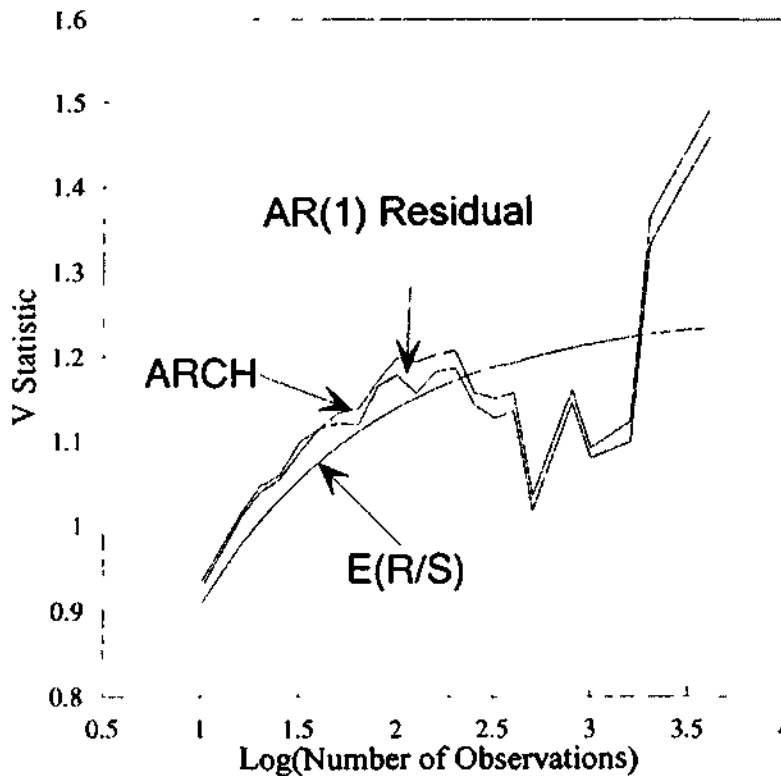


РИСУНОК 5.9 V-статистика, процесс ARCH.

GARCH, с другой стороны, имеет минимально персистентные значения, как показано на рисунке 5.10. Однако они не являются значимыми на 5-процентном уровне. И снова AR(1)-разность не затрагивает процесс масштабирования. К сожалению, эти графики не соответствуют R/S-графику для иены/доллара на рисунке 4.2, даже при том, что GARCH часто постулируется как модель, подходящая для валюты. Мы исследуем это несоответствие в дальнейших главах.

Проблемы со стохастическими моделями

Четыре модели, кратко описанные выше, являются самыми популярными альтернативными моделями процесса Херста для рынков. Кажется, что каждая охватывает некоторые эмпирические данные о рынках, но ни одна не является полностью удовлетворительной. Проблема, вероятно, заключается в том, что каждая из них обращается к *локальному* свойству рынков. Кажется, что многие из этих локальных свойств связаны с некоторыми инвестиционным горизонтами, но не со всеми. Процессы AR, например, характерны для очень высокочастотных данных, таких как однодневная торговля. Для долгосрочных горизонтов, таких как месячные прибыли, они представляют меньшую проблему. GARCH имеет

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

распределение с толстыми хвостами и высоким пиком, но она не самоподобна; параметры GARCH кажутся зависимыми от периода и не являются постоянными при внесении поправки на масштаб. Вообще, эти модели не соответствуют гипотезе фрактального рынка, но их необходимо рассматривать при исследовании данных, определяемых периодом. Исключением является дробная версия семейства моделей ARIMA, но обсуждение этого важного класса необходимо отложить до Главы 13. Другое исключение – модель IGARCH, которая обладает конечной условной дисперсией и в то же время бесконечной безусловной дисперсией. Эта модель будет обсуждаться в Главе 14.

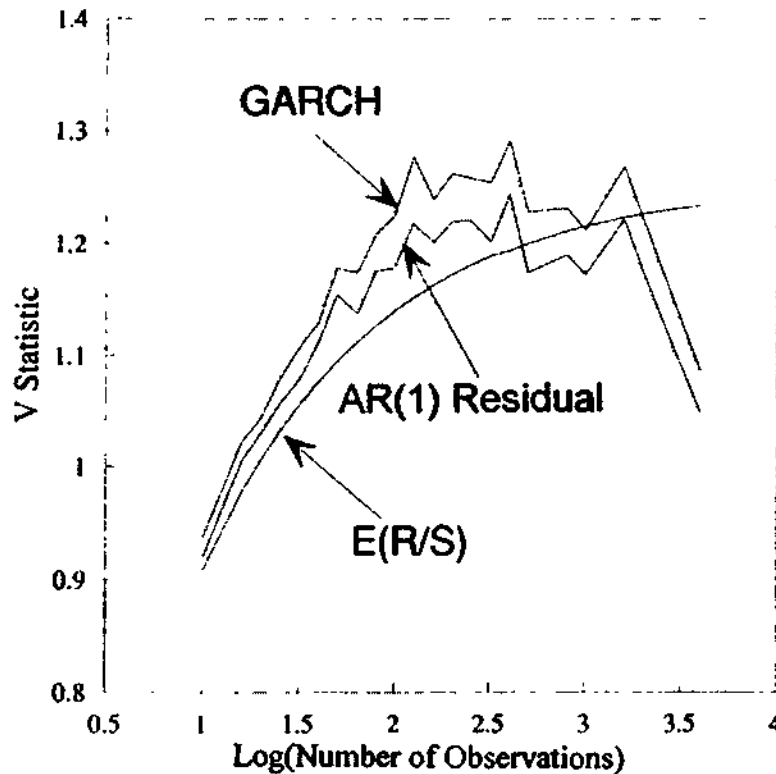


РИСУНОК 5.10 V-статистика, процесс GARCH.

ВЫВОДЫ

В этой главе мы разработали критерии значимости для R/S-анализа. Мы выяснили, что эмпирическая поправка к более ранней формуле, выведенной Энисом и Ллойдом (Anis and Lloyd, 1976), позволит вычислить ожидаемое значение R/S-статистики для независимых случайных переменных. Исходя из этого, мы смогли вычислить ожидаемое значение показателя Херста H . Было найдено, через моделирование методом Монте-Карло, что дисперсия составляет $1/T$, где T – количество наблюдений. Когда мы проверяли ряд популярных стохастических моделей для рынков капитала, мы нашли, что ни один из них не обнаруживает эффект персистентности Херста после отфильтровывания процессов кратковременной памяти. Ряды ARCH и GARCH не могли быть отфильтрованы, но также не обнаружили эффекты долговременной памяти в необработанной форме.

6

Нахождение циклов: периодических и непериодических

Для некоторых технических аналитиков нахождение циклов синонимично анализу рынка. Есть что-то успокаивающее в той идее, что рынки, подобно многим явлениям природы, имеют регулярные отливы и приливы. Эти техники полагают, что существуют регулярные рыночные циклы, скрытые шумом или нерегулярными возмущениями, которые приводят в движение основной часовой механизм рынка. Такие "циклы" доказали свое непостоянство неосторожным инвесторам. Иногда они работают, иногда нет. Статистические испытания, такие как спектральный анализ, находят только коррелированный шум. Поиск циклов на рынке и в экономике разочаровал всех заинтересованных лиц.

К сожалению, западная наука типично искала регулярные или *периодические* циклы – те, которые имеют предсказуемый порядок возникновения. Эта традиция, вероятно, берет свое начало у зарождения науки. Первоначально существовала смена времен года и планирование, необходимое для охоты и ведения сельского хозяйства. Затем была астрономия, которая показала правильные лунные и солнечные циклы. Примитивные сооружения, такие как Стоунхендж, основаны на регулярности весеннего и осеннего равноденствия. Благодаря своей гладкости и симметричности правильные циклы также привлекали и древних греков. Они даже полагали, что природа предпочитает совершенный круговорот и Аристотель создал модель вселенной, основанную на перемещении небесных тел по совершенным окружностям. Позднее, механизмы, такие как маятник, основывались на регулярных, периодических движениях. Из этой традиции развилась механика Ньютона и математический анализ периодических циклов.

Однако вскоре появились проблемы. В течение многих столетий календарь вызывал конфликты; даже сейчас эти проблемы не решены удовлетворительно. Лунные и солнечные календари не совпадают. Наш день основывается на вращении земли вокруг своей оси, а наш год – на вращении земли вокруг солнца. Мы хотели бы, чтобы каждый солнечный год содержал одинаковое количество лунных дней, но, к сожалению, это – не так. Чтобы компенсировать этот недостаток регулярности, мы прибавляем дополнительный день к солнечному году каждые четыре года. Таким образом, мы налагаем регулярность на нерегулярную систему.

В основе западной музыки лежит 12-нотный звукоряд, который вписывается в октаву. К сожалению, совершенная настройка полутонов (так, чтобы они были чистыми и без долей) приводит к тому, что 12-нотный звукоряд меньше октавы. Наиболее популярное решение этой проблемы заключается в распространении ошибки на все ноты. Такая "равномерно темперированная настройка" срабатывает в большинстве случаев, но это опять является попыткой навязать регулярность нерегулярной системе.

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

В астрономии было замечено, что блуждающие звезды, планеты, не следовали правильным путем, а часто за короткий срок полностью меняли направление. Греки продолжали верить, что природа не вынесла бы любую планетарную систему, которая не состояла бы из совершенных окружностей, описанных ранее Аристотелем. В результате Птолемей и его последователи разработали сложные схемы, чтобы показать, что наблюдаемая нерегулярность могла быть следствием ненаблюдаемой регулярности. Например, явление изменения направления движения планет объяснялось следующим образом. Во время вращения вокруг земли (по совершенной окружности) планеты также двигались по меньшей орбитальной окружности, аналогично тому, как наша Луна вращается вокруг Земли, в то время как и Луна, и Земля вращаются вокруг Солнца. Два правильных движения, происходящие одновременно, приводят к наблюдаемому неправильному движению. Этот метод объяснял неправильность планетарных движений, сохраняя при этом идею о том, что структура, лежащая в основе природы, была все же правильной. Птолемея модель работала хорошо для объяснения наблюдений и предсказания планетарных движений далеко в будущем. К сожалению, лежащая в его основе теория была неправильна. В анализе временного ряда внимание также было сосредоточено на регулярных, периодических циклах. В анализе Фурье мы предполагаем, что временные ряды неправильной формы являются суммой нескольких периодических синусоидальных волн, каждая из которых имеет отличающиеся частоты и амплитуды. Спектральный анализ пытается разбить наблюдаемый нерегулярный временной ряд, без очевидного цикла, на эти синусоидальные волны. Пики в спектральной функции считаются доказательством циклического поведения. Подобно Птолемеевой модели вселенной спектральный анализ налагает ненаблюдаемую периодическую структуру на наблюдаемый непериодический временной ряд. Вместо окружности мы имеем синусоидальную или косинусоидальную волну.

Грэнджер (Granger, 1964) был первым, кто предположил, что спектральный анализ может быть применен к рыночному временному ряду. Его результаты были неубедительными. С течением времени были выполнены различные преобразования данных, чтобы найти признаки циклов, так как интуиция подсказывала, что они там были; но они не могли быть найдены. Наконец, большинство исследователей отказалось от попыток и решило, что циклы походили на удачливые серии азартных игроков – то есть представляли собой иллюзии.

К сожалению, нет никакой интуитивной причины полагать, что основа рынка или экономических циклов имеет какое-либо отношение к синусоидальным волнам или любому другому периодическому циклу. Спектральный анализ был бы несоответствующим инструментом для анализа рыночных циклов. В теории хаоса непериодические циклы существуют. Эти циклы имеют среднюю продолжительность, но точная продолжительность будущего цикла неизвестна. Здесь ли стоит искать? Если да, то нам нужен более надежный инструмент для анализа цикла, инструмент, который может обнаружить и периодические, и непериодические циклы. К счастью, R/S-анализ может выполнить эту функцию.

Мы начнем эту главу с исследования эффективности R/S-анализа в раскрытии периодических циклов, даже когда циклы накладываются друг на друга. Затем мы

6. Нахождение циклов: периодических и непериодических

обратимся к непериодическим циклам и хаотическим системам. Глава заканчивается исследованием некоторых естественных систем, которые, как известно, обнаруживают непериодические циклы. К анализу рынков мы перейдем в Главе 7.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

Херст (Hurst, 1951) был первым, кто понял, что лежащий в основе периодический компонент мог быть обнаружен с помощью R/S-анализа. Периодическая система соответствует предельному циклу или подобному типу аттрактора. По существу, ее портрет фазового пространства является ограниченным множеством. В случае синусоидальной волны временной ряд будет ограничен амплитудой волны. Поскольку диапазон никогда не может вырасти за пределы амплитуды, значения R/S достигнут максимального значения после одного цикла. Мандельброт и Уоллис (Mandelbrot and Wallis, 1969a-1969d) провели большое количество компьютерных моделирований, особенно учитывая доступную в то время технологию. Здесь мы повторим и дополним некоторые из их экспериментов, чтобы показать поведение R/S-анализа в присутствии периодических компонентов. Мы начинаем с простой синусоидальной волны:

$$Y_t = \sin(t) \quad (6.1)$$

где t = показатель времени

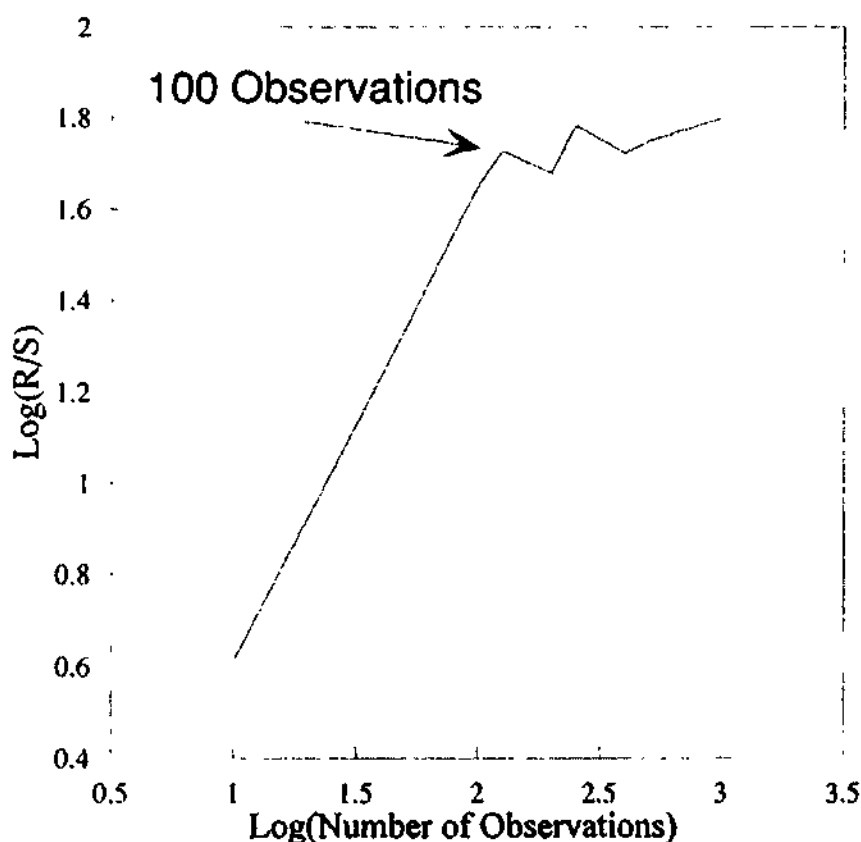


РИСУНОК 6.1 R/S-анализ, синусоидальная волна: цикл = 100.

На рисунке 6.1 представлен график в логарифмическом масштабе по обеим осям для синусоидальной волны с длиной цикла в 100 итераций. Разрыв при $t = 100$

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

абсолютно очевиден. Другие методы, такие как спектральный анализ, могут с легкостью найти такие простые периодические компоненты. Важно то, как R/S-анализ фиксирует этот процесс. По существу, как только синусоидальная волна охватила полный цикл, ее диапазон прекращает расти, так как он достиг своей максимальной амплитуды. Ее максимальный диапазон, от пика до впадины, не больше для 500 наблюдений, чем для 100. Средний R/S прекращает расти после 100 наблюдений.

Карл Вейерштрасс (Karl Weierstrass), немецкий математик, создал первую фрактальную функцию. Эта функция была повсюду непрерывна, но нигде не была дифференцируема. Функция – бесконечная сумма рядов синусоидальных (или косинусоидальных) волн, в которых амплитуда уменьшается, в то время как частота увеличивается в соответствии с различными коэффициентами. Уэст (West, 1990) использовал эту функцию экстенсивно в качестве введения во фрактальные временные ряды. Здесь мы увидим, как R/S-анализ может определить не только первичный цикл, но также и основные циклы, пока количество подциклов является небольшим, конечным числом.

Функция Вейерштрасса накладывает бесконечное число синусоидальных волн. Мы начинаем с главной, или основной частоты w с амплитудой 1. Добавляется второй гармонический член с частотой bw и амплитудой $1/a$, где a и b больше 1. Третий гармонический член имеет частоту b^2w и амплитуду $1/a^2$. Четвертый член имеет частоту b^3w и амплитуду $1/a^3$. Как обычно происходит с непрерывной функцией, прогрессия продолжается бесконечно. Каждый член имеет частоту, которая является степенью b , большей чем предыдущая, и амплитуду, которая является степенью меньшего a . Используя уравнение (1.5) из Главы 1, мы видим, что фрактальная размерность D этой кривой будет $\ln(a)/\ln(b)$. Формальное уравнение функции Вейерштрасса выглядит следующим образом, будучи записанным в качестве ряда Фурье:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/a^n * \cos(b^n * w * t)$$

На рисунке 6.2 показана функция Вейерштрасса с использованием первых четырех членов ($n = 1 - 4$). На рисунке 6.3 показаны первые четыре члена в разрыве, чтобы раскрыть наложение циклов. Заключительный график – сумма четырех синусоидальных волн, каждой со своей частотой и амплитудой. Для небольших приращений времени диапазон будет постоянно увеличиваться, пока он не пересечет продолжительность цикла наименьшей частоты. Он снова начнет расти со следующей более длинной частотой, но на него также наложится более короткая частота, что приведет к "более шумному" циклу. Этот диапазон продолжит расти, пока он не достигнет конца своего цикла; после этого диапазон прекратит расти, пока он не поймает следующую, более длинную частоту. Диапазон для этой частоты опять будет расти, но на него будут наложены две другие более короткие частоты. В результате он будет казаться еще более шумным. Заключительная, самая длинная частота будет реагировать также как другие.

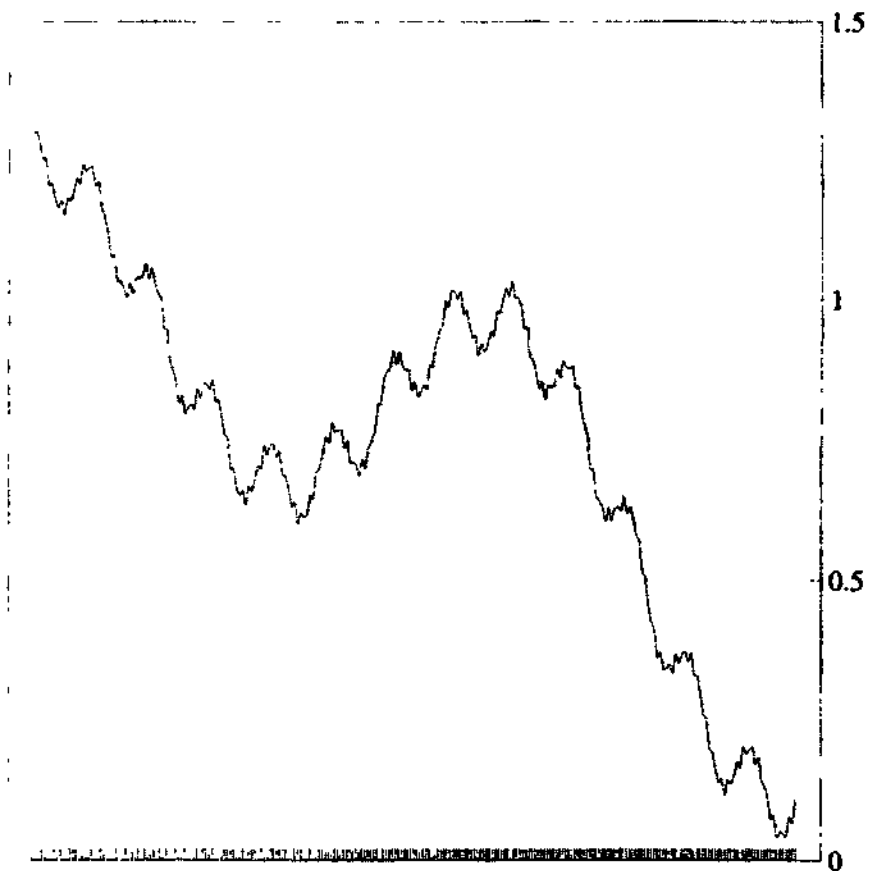


РИСУНОК 6.2 Функция Вейерштрасса.

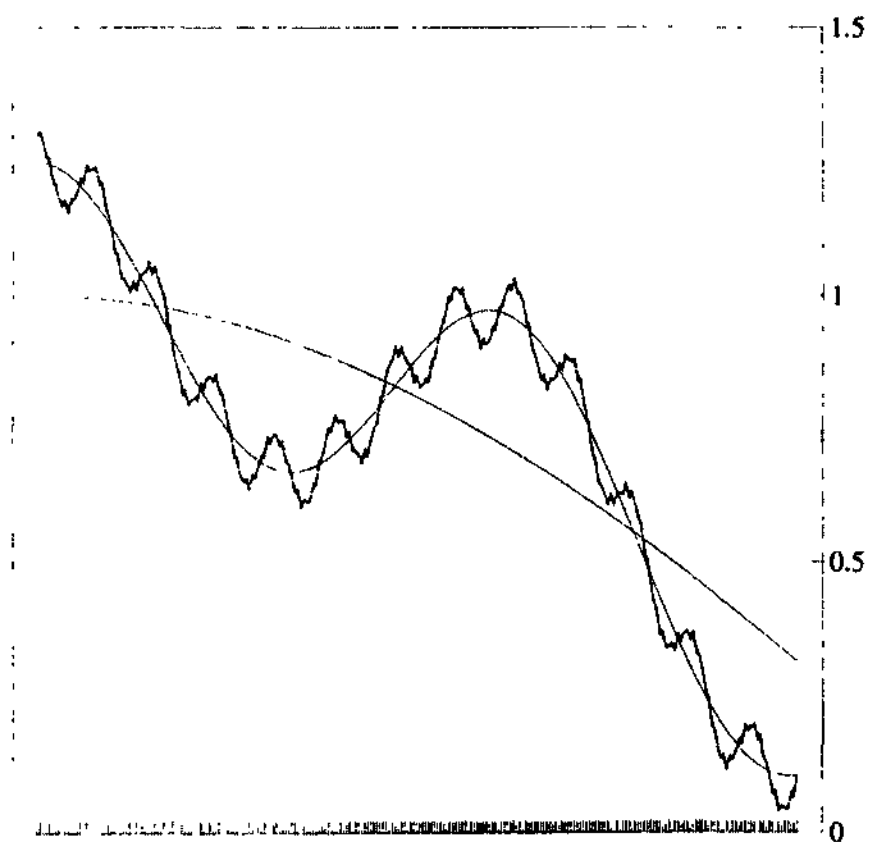


РИСУНОК 6.3 Функция Вейерштрасса, первые четыре частоты.

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

График в логарифмическом масштабе по обеим осям для R/S-анализа показан на рисунке 6.4. Конец каждого частотного цикла и начало следующего ясно видны как "разрывы" или уплощения на графике R/S. Заметьте, что наклон для каждой частоты также понижается. Для самой короткой частоты $H = 0,95$; для самой длинной частоты $H = 0,72$. Часть графика R/S для второй самой короткой частоты включает в начале "шишку". Эта шишка – появление более короткой предыдущей частоты. В третьей самой короткой частоте неясно видны две шишки. Однако к третьей частоте наложение самоафинной структуры слишком зазубрено, чтобы можно было различить меньшие структуры. Это приводит нас к заключению, что R/S-анализ может различить циклы внутри циклов, если количество циклов меньше четырех. При большем количестве циклы становятся размазанными. Если бы было бесконечное количество циклов, как в полной функции Вейерштрасса, то график в логарифмическом масштабе по обеим осям был бы прямой линией с $H \approx 0,70$.

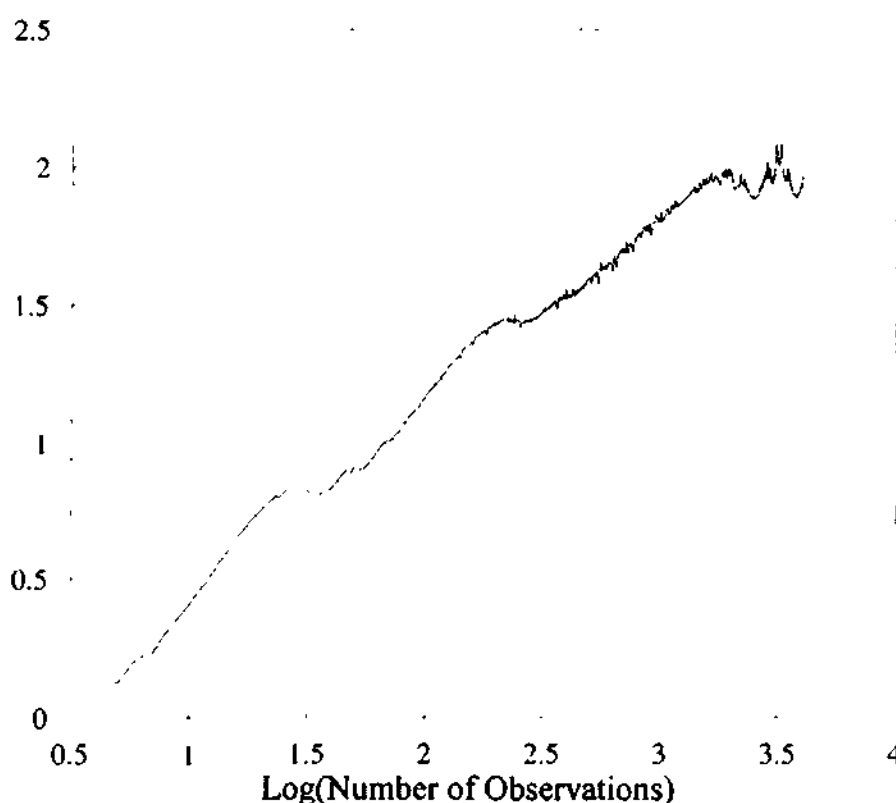


РИСУНОК 6.4 R/S-анализ, функция Вейерштрасса.

Есть более легкий способ увидеть, когда в графике в логарифмическом масштабе по обеим осям появляются разрывы, и лучше оценить продолжительность цикла. Следующая простая статистика первоначально использовалась Херстом (Hurst, 1951) для проверки на стабильность. Я также нашел, что она дает более точное измерение длины цикла, которое особенно хорошо работает в присутствии шума. Эта статистика, называемая V-статистикой, определяется следующим образом:

$$V_n = (R/S)_n / \sqrt{n} \quad (6.3)$$

Это отношение приведет к горизонтальной линии, если R/S статистика изменяет масштаб пропорционально квадратному корню из времени. Другими

6.Нахождение циклов: периодических и непериодических

словами, график V против $\log(n)$ будет плоским, если процесс является независимым, вероятностным процессом. С другой стороны, если процесс персистентен и R/S изменяет масштаб быстрее, чем квадратный корень из времени ($H > 0,50$), то график будет иметь наклон вверх. Наоборот, если процесс антиперсистентен ($H < 0,50$), график будет иметь наклон вниз. При вычерчивании V на оси y и $\log(n)$ на оси X "разрывы" появятся, когда график V выравнивается. В таких точках процесс с долговременной памятью рассеивается.

На рисунке 6.5 показана V -статистика для уравнения Вейерштрасса. Обратите внимание на сглаживание наклона в конце каждого периодического цикла. Исследуя максимальное значение V в каждом интервале, мы можем оценить длину цикла для каждой частоты. Из рисунка 6.5 мы можем видеть, что R/S -анализ способен определять периодические циклы, даже когда они накладываются. Но у нас есть для этого другие инструменты. Реальной силой R/S -анализа является обнаружение непериодических циклов.

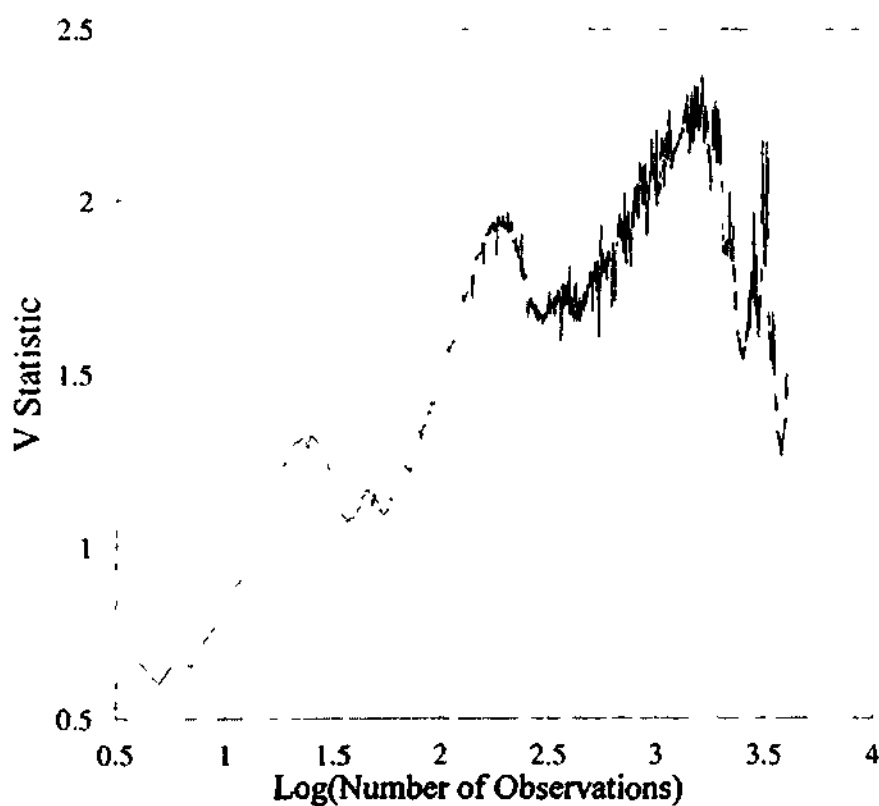


РИСУНОК 6.5 Функция Вейерштрасса, V -статистика.

НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

Непериодический цикл не имеет абсолютной частоты. Вместо нее он имеет среднюю частоту. Мы знакомы со многими процессами, которые имеют абсолютные частоты, и они имеют тенденцию быть большими, очень важными системами. Они включают время, необходимое для одного оборота Земли вокруг солнца, а также время, необходимое нашей планете, чтобы совершить один оборот вокруг своей оси.

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

Мы создали часы и календари, которые точно делят эти частоты на приращения, называемые годами, днями или минутами. Смена времен года кажется абсолютно периодической. За весной идут лето, осень и зима. Мы привыкли подразумевать слово "периодический" каждый раз, когда мы используем слово "цикл". И все же, мы знаем, что некоторые вещи имеют циклы, но мы не можем быть точно уверены, как долго длится каждый цикл. Сезонный характер погоды на Земле совершенно предсказуем, но мы знаем, что исключительно высокие температуры могут сопровождаться еще более высокими температурами, вызывая "тепловую волну". Мы также знаем, что чем дольше длится тепловая волна, тем более вероятно, что она закончится. Но мы не знаем точно, когда.

Теперь мы знаем, что эти непериодические циклы могут иметь два источника:

1. Они могут быть статистическими циклами, иллюстрируемыми явлениями персистентности Херста (долгосрочные корреляции) и резкими изменениями в направлении;
2. Они могут быть результатом нелинейной динамической системы, или детерминированного хаоса.

Теперь мы кратко обсудим различия между этими двумя системами.

Статистические циклы

Процесс Херста, подробно исследованный в Главе 4, является процессом, который может быть описан как смещенное случайное блуждание, но смещение может резко измениться по направлению или величине. Эти резкие изменения в смещении, смоделированные Херстом с помощью джокера в его вероятностной колоде карт, являются проявлениями циклов. К сожалению, несмотря на устойчивость статистической структуры, выпадение джокера является случайным событием. Поскольку снятие вероятностной колоды происходит с заменой, не существует способа предсказать, когда выпадет джокер. Когда Мандельброт (Mandelbrot, 1982) сказал, что "циклы ничего не значат", если экономические циклы являются процессом Херста, он подразумевал, что продолжительность цикла не имела значения и не была результатом только временного ряда. Вместо этого, выпадение джокера происходило вследствие некоторого экзогенного события, которое может или не может быть предсказано. В свете этого "циклы" Херста не имеют средней длины, и график в логарифмическом масштабе по обеим осям продолжает изменять масштаб бесконечно. Рисунок 6.6(a) показывает смоделированный временной ряд с $H = 0,72$. Временной ряд "напоминает" график фондовой биржи, с положительными и отрицательными участками и обычным количеством "шума". Рисунок 6.6 (b) является графиком R/S для того же самого ряда. Хотя ряд представляет собой более 8 000 наблюдений в длину, тенденции к отклонению от линии тренда не наблюдается. Нет средней длины цикла.

6. Нахождение циклов: периодических и непериодических

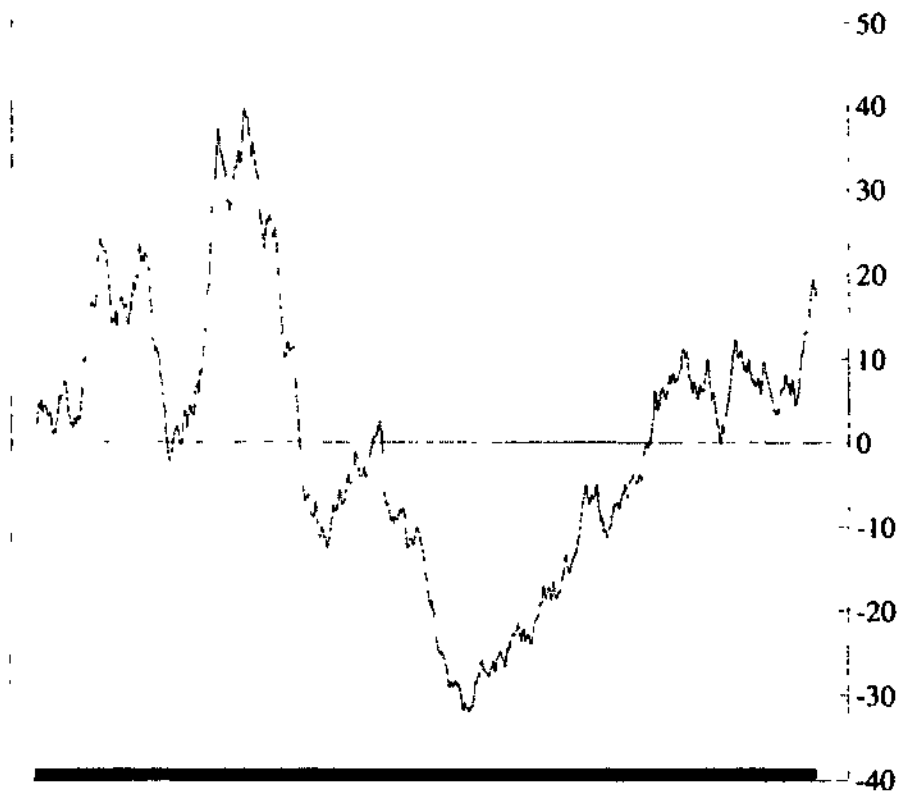


РИСУНОК 6.6a Фрактальный временной ряд: $H = 0,72$.

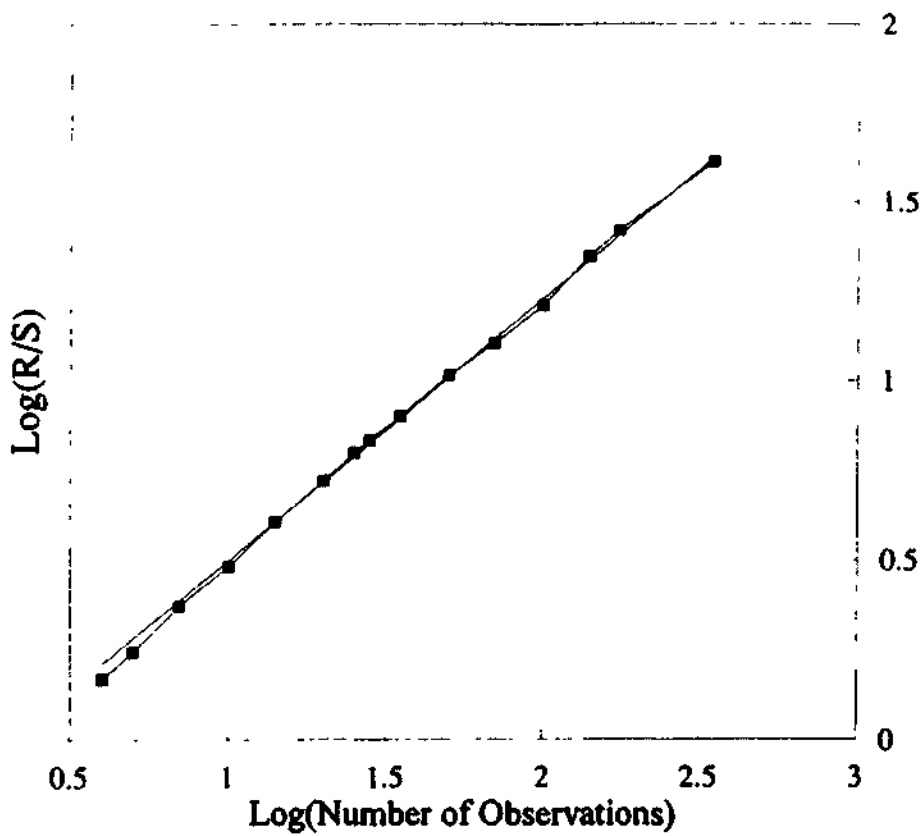


РИСУНОК 6.6b R/S-анализ, фрактальный временной ряд: $H = 0,72$.

Хаотические циклы

Нелинейные динамические системы являются детерминированными системами, которые могут проявлять беспорядочное поведение. При обсуждении хаоса обычно обращаются к *хаотическим отображениям*. Отображения обычно представляют собой системы итерированных разностных уравнений, таких как известное логистическое уравнение:

$$X_t = a * X_{t-1} * (1 - X_{t-1}), 0 < X < 1$$

Этот тип уравнения является замечательным обучающим инструментом, потому что он производит статистически случайные числа детерминировано. Однако в качестве инструмента для рыночного или экономического анализа это уравнение не очень полезно. Итеративные отображения, подобные логистическому уравнению, обнаруживают хаос один раз на итерацию; то есть длина их памяти чрезвычайно коротка. Они не обнаруживают такие типы циклов, которые мы видим в экономике или инвестициях.

Вместо этого, мы изучим *хаотические потоки*, непрерывные системы взаимозависимых дифференциальных уравнений. Такие системы используются для моделирования больших экосистем (таких как погода, например) и термодинамических систем. Самая известная система этого типа – знаменитый аттрактор Лоренца (Lorenz, 1963), который представлен во многих статьях о хаосе и широко обсуждается в работе Глейка (Gleick, 1987).

Более простая система – уравнение Макки-Гласса (Mackey and Glass, 1977), которое было выведено для моделирования производства красных кровяных телец. Его основная предпосылка заключается в том, что текущее производство основано на прошлом производстве и текущем измерении. Задержка между производством и измерением текущих уровней производит "цикл", связанный с этой задержкой. Поскольку система нелинейна, сверх- и недопроизводство имеют тенденцию к усилению, что приводит к неперiodическим циклам. Средняя длина неперiodических циклов, однако, очень близка времени задержки. Дополнительная характеристика уравнения Макки-Гласса заключается в том, что оно является дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом: оно имеет бесконечное число степеней свободы, подобно рынкам. Эта черта, конечно, делает его хорошим кандидатом для моделирования. Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом может быть приведено к разностному уравнению следующим образом:

$$X_t = 0,9 * X_{t-1} + 0,2 * X_{t-n} \quad (6.4)$$

Степень нерегулярности и, следовательно, лежащая в основе фрактальная размерность зависит от временного лага n . Однако уравнение позволяет изменять лаг и, следовательно, используемый цикл. Мы можем использовать уравнение Макки-Гласса для проверки нашей гипотезы о том, что R/S-анализ может оценить среднюю длину неперiodического цикла.

Вариант уравнения Макки-Гласса, показанный в уравнении (6.4) является первоначальным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом, преобразованным в разностное уравнение. В этой форме оно может быть легко

6.Нахождение циклов: периодических и непериодических

смоделировано в электронной таблице. Начиная с лага $p = 50$, шаги таковы:

1. Вставьте 0,10 в ячейку A1. Скопируйте 0,10 в первые 50 ячеек в столбце A.
2. В ячейке A51, напечатайте: $0,9*A50 + .2*A1$.
3. Скопируйте ячейку A51 вниз для 8 000 ячеек.

При изменении лага p введите 0,10 для первых p ячеек в столбце A. Выполните вышеуказанные действия, начиная шаг 2 в ячейке $A(p + 1)$.

На рисунке 6.7 показаны первые 500 из 8 000 наблюдений, используемых для этого испытания. Обратите внимание на нерегулярные длины цикла, типичные для нелинейной динамической системы. На рисунке 6.8 представлен график R/S для всех 8 000 значений с очевидным $H = 0,93$ для $p < 50$. Однако при $p > 50$ наклон является фактически нулевым, показывая, что достигнут максимальный диапазон. Уравнение Макки-Гласса, будучи гладкой, детерминированной системой, имеет показатель степени Херста близкий к 1. На рисунке 6.9 приведен график V -статистики для тех же значений. Длина цикла при приблизительно 50 наблюдениях абсолютно очевидна. На рисунке 6.10 отставание было изменено на 100 наблюдений. Разрыв графика R/S теперь происходит при $p = 100$, подтверждая тот факт, что R/S -анализ может обнаруживать различные длины цикла. Читателю советуется изменить отставание уравнения Макки-Гласса, чтобы проверить это заключение.

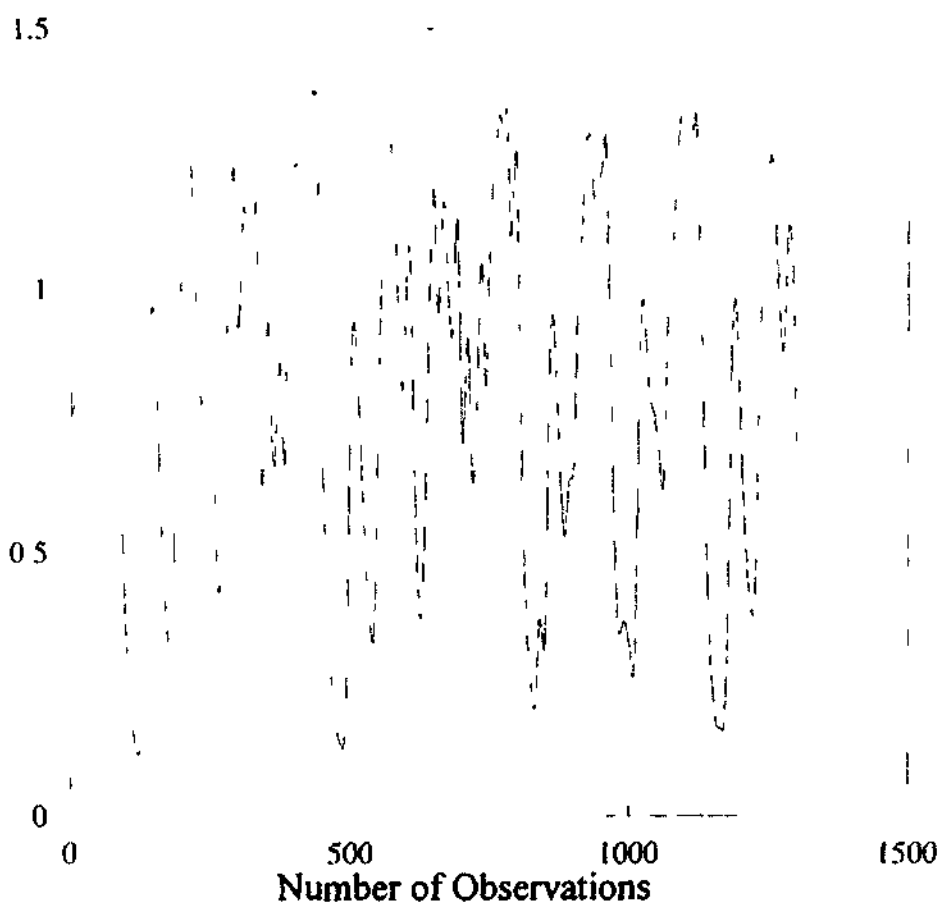


РИСУНОК 6.7: Уравнение Макки-Гласса: отставание наблюдения = 50.

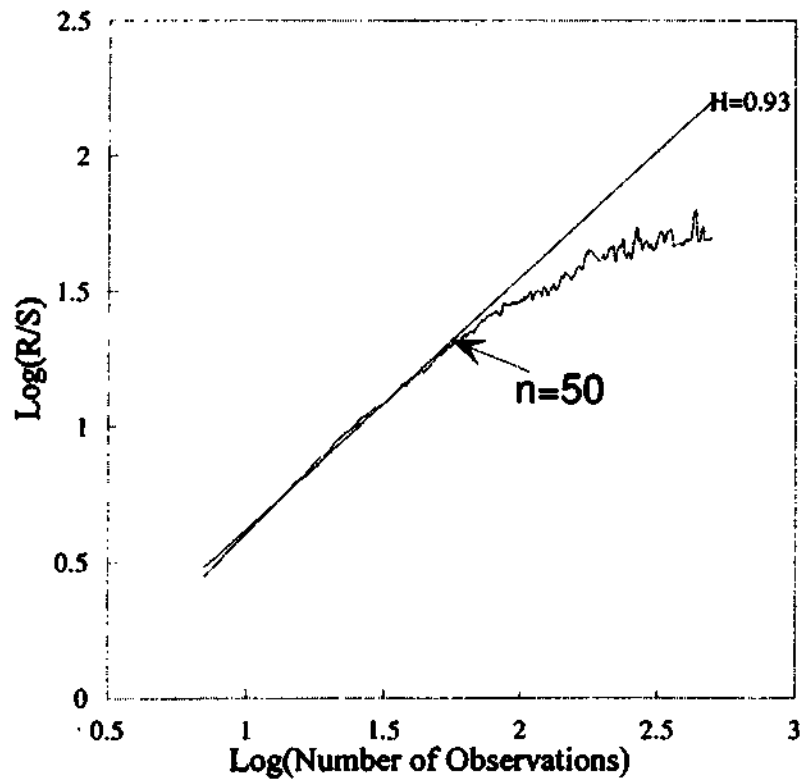


РИСУНОК 6.8 R/S-анализ, уравнение Макки-Гласса: отставание наблюдения = 50.

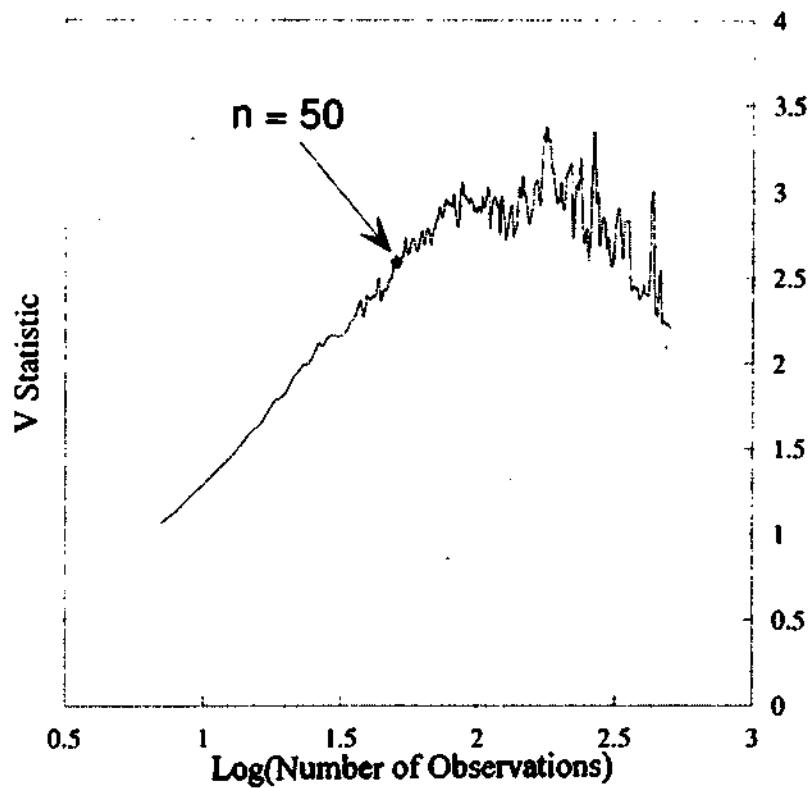


РИСУНОК 6.9 V-статистика, уравнение Макки-Гласса: отставание наблюдения = 50.

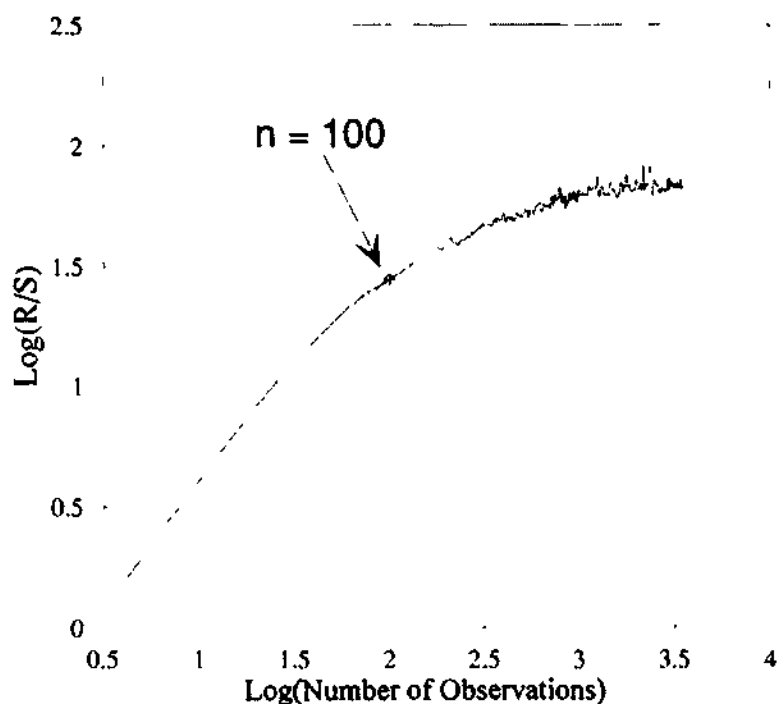


РИСУНОК 6.10 R/S-анализ, уравнение Макки-Гласса: отставание наблюдения = 100.

Добавление шума

Рисунок 6.8 показывает, что R/S-анализ может определить среднюю длину непериодических циклов для большого значения N . Однако многие испытания очень хорошо работают в отсутствие шума, но при добавлении небольшого количества шума процесс терпит неудачу. Примеры включают сечения Пуанкаре и реконструкцию фазового пространства. Тем не менее, поскольку R/S-анализ был создан для измерения количества шума в системе, можно было бы ожидать, что R/S-анализ будет более устойчивым к шуму.

Существует два типа шума в динамических системах. Первый называется *наблюдаемым* или *аддитивным шумом*. Этот шум не затрагивает систему; вместо этого шум представляет проблему для измерения. Наблюдатель испытывает затруднения при точном измерении выхода системы, так что к зарегистрированному значению прибавляется шумовое приращение.

Например, предположим, что вы изучаете капающий кран, измеряя время между каплями. Вы установили измерительный прибор на столе и поместили микрофон под тем местом, куда капает вода, чтобы записать точный момент, когда капля воды ударяется о дно. К сожалению, вы находитесь в оживленной лаборатории, где много других людей, которые также выполняют эксперименты. Каждый раз, когда кто-то – то проходит мимо, ваш стол немного покачивается, и это изменяет время, когда капля ударяется о микрофон. Аддитивный шум является внешним для процесса. Это проблема наблюдателя, а не системы.

К сожалению, когда большинство людей думает о шуме, они думают об аддитивном шуме. Однако второй тип шума, называемый *динамическим шумом*,

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

может быть еще более распространен и представляет гораздо большую проблему. Когда система интерпретирует шумный выход как вход, мы имеем динамический шум, потому что шум вторгается в систему. Мы будем исследовать динамический шум более подробно в Главе 17.

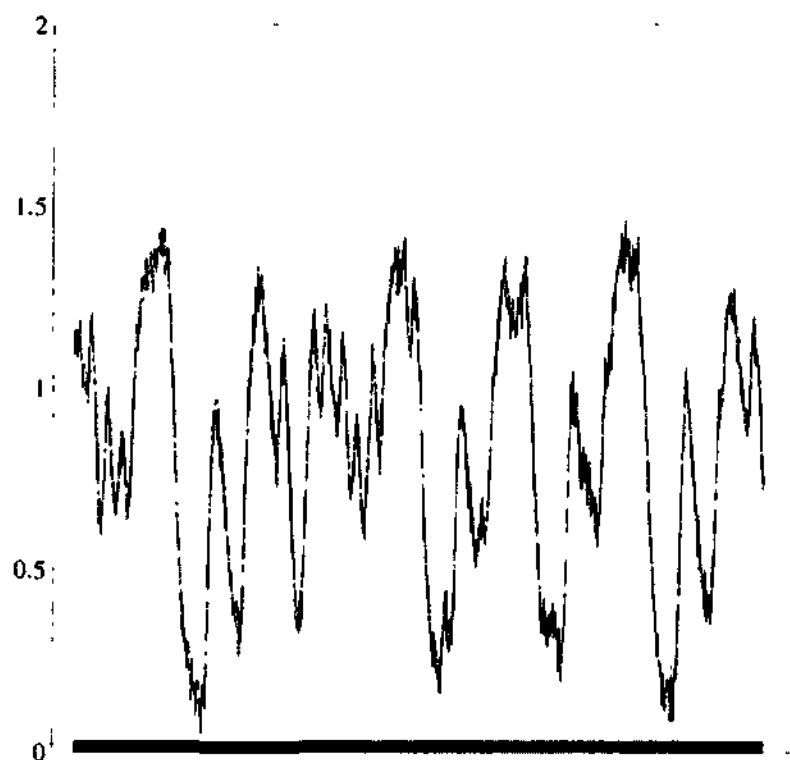


РИСУНОК 6.11 Уравнение Макки-Гласса, добавлен наблюдаемый шум.

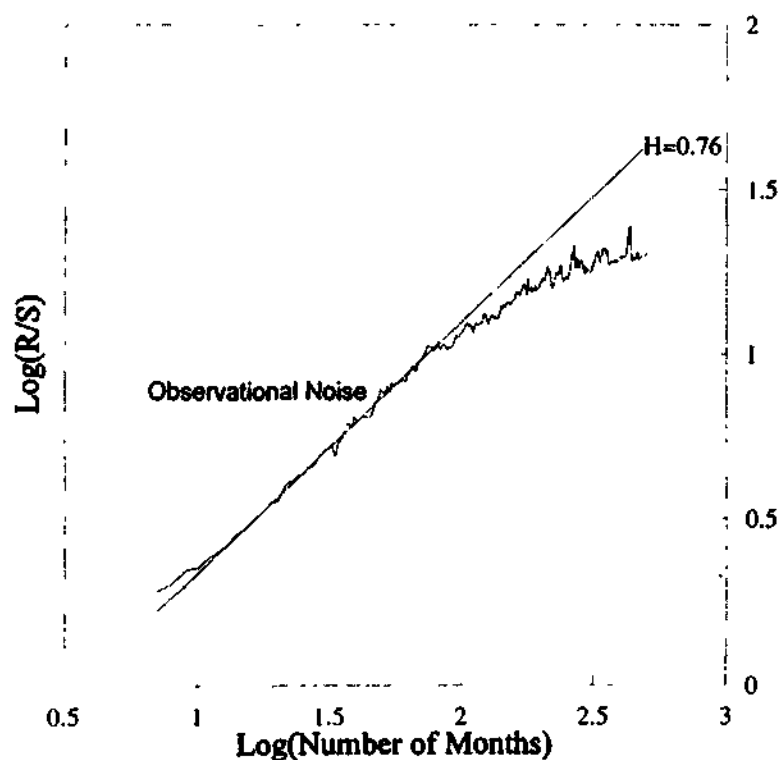


РИСУНОК 6.12 R/S-анализ, уравнение Макки-Гласса с наблюдаемым шумом.

6. Нахождение циклов: периодических и непериодических

Пока мы будем иметь дело с аддитивным шумом. На рисунке 6.11 показаны те же самые точки, что и на рисунке 6.7, с добавлением одного стандартного отклонения шума. Временной ряд намного более похож на естественный временной ряд. На рисунке 6.12 представлен график R/S с $H = 0,76$. Добавление одного стандартного отклонения шума уменьшило показатель Херста, как и следовало ожидать, потому что временной ряд теперь более изрезан. V-статистика на рисунке 6.13 также не затронута добавлением большого количества шума. Длину цикла все еще можно оценить при $n = 50$.

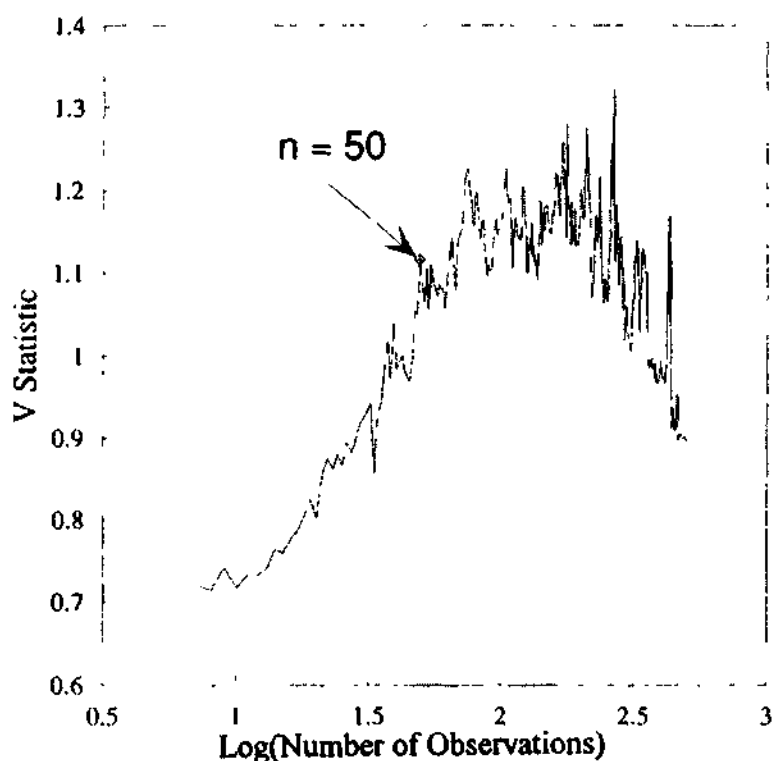


РИСУНОК 6.13 V-статистика, уравнение Макки-Гласса: отставание наблюдения = 50.

R/S-анализ является особенно устойчивым к шуму – действительно, кажется, что с ним он процветает.

Эмпирический пример: солнечные пятна

В книге *"Хаос и порядок на рынках капитала"*, я исследовал солнечные пятна. Я повторю это исследование здесь, используя некоторые из новых методов, описанных в этой главе.

Ряд солнечных пятен получен из работы Харлана Тру Стетсона *"Солнечные пятна и их эффекты"* (Stetson, 1938). Временной ряд содержит данные о ежемесячном количестве солнечных пятен с января 1749 г. по декабрь 1937 г. Ряд был записан людьми, которые ежедневно наблюдали за солнцем и подсчитывали число солнечных пятен. Интересно отметить, что если большое количество солнечных пятен располагалось близко друг к другу, они считались одним большим солнечным пятном. Как вы можете видеть, в этом ряде должна была возникнуть проблема с наблюдательным шумом, даже для среднемесячного значения. Кроме того, хорошо известно, что система солнечных пятен имеет непериодический цикл, равный

Часть 2. Фрактальный R/S анализ

приблизительно 11 годам. 11-летний цикл получен из наблюдений. На рисунке 6.14 показан R/S-график числа солнечных пятен. Небольшие значения n имеют сглаженный наклон, который показывает влияние наблюдательного шума при коротких частотах. Как только наклон начинает увеличиваться, мы получаем $H = 0,72$ для $n < 11$ лет. Приблизительно в 11 лет наклон сглаживается, показывая, что длина неперiodического цикла, действительно, равна приблизительно 11 годам. График V-статистики на рисунке 6.15 подтверждает, что цикл составляет приблизительно 11 лет.

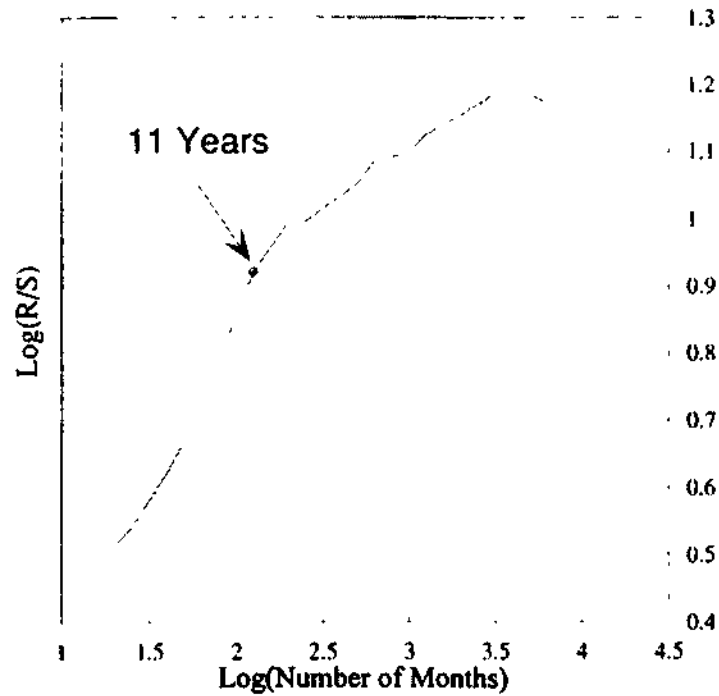


РИСУНОК 6.14 R/S-анализ, солнечные пятна: январь 1749 г. – декабрь 1937 г.

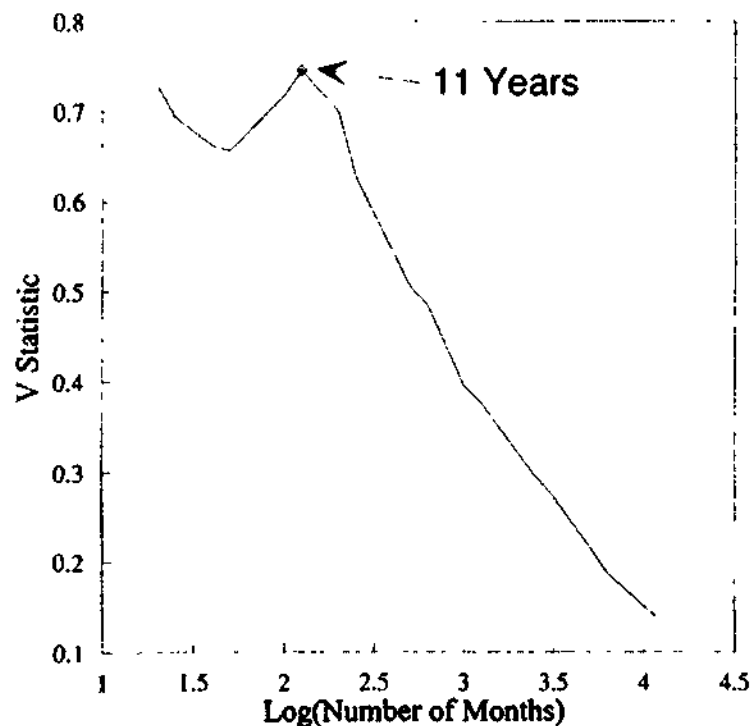


РИСУНОК 6.15 V-статистика, солнечные пятна: январь 1749 г. – декабрь 1937 г.

ВЫВОДЫ

В этой главе мы увидели, что R/S -анализ может не только выявить персистентность, или долговременную память, во временном ряде, но может также оценить длину периодических или непериодических циклов. Он также является устойчивым относительно шума. Это делает R/S -анализ особенно привлекательным для изучения естественных временных рядов и, в частности, рыночных временных рядов. В следующей главе мы исследуем некоторые рыночные и экономические временные ряды на персистентность и циклы.

ЧАСТЬ 3

ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

7

Методология изучения проблемы

В этой части книги мы проанализируем несколько рыночных временных рядов, используя инструменты из Глав 4 – 6. Читатели, знакомые с книгой *"Хаос и порядок на рынках капитала"*, вспомнят, что такой анализ проводился в той работе. Однако между моим более ранним исследованием и исследованием, содержащимся в этих главах, есть существенные различия.

Основная цель моего предыдущего исследования состояла в том, чтобы доказать, что гипотеза эффективного рынка (ЕМН) несостоятельна, а также что рынки представляют собой процессы Херста, или смещенные случайные блуждания. И это мне удалось. Моя цель в настоящей работе состоит в том, чтобы проиллюстрировать метод, который может быть применен к собственной сфере интересов читателей. Поэтому проведенное здесь исследование в большей степени является последовательным процессом. Каждый пример был выбран для изучения определенного элемента или проблемы в применении R/S-анализа, а также способа ее устранения. Исследования интересны сами по себе, для понимания рынков. Они были выбраны в качестве иллюстраций таким образом, чтобы читатели могли применить R/S-анализ к своим собственным сферам интереса.

Данное исследование будет использовать критерии значимости и методы подготовки данных, описанные в предыдущих главах. В моей более ранней книге эти методы не были выработаны; действительно, мою книгу, изданную в 1991 г., критиковали, потому что "сила" R/S-анализа была неизвестна. Используя критерии значимости, теперь мы можем анализировать тот тип системы, с которой мы имеем дело. Как уже говорилось в Главе 2, различные рынки могут фактически иметь различные структуры при расширении инвестиционного горизонта.

Глава начинается с обсуждения методологии, используемой в анализе. Затем мы проанализируем различные рынки в индивидуальном порядке. R/S-анализ будет применяться к различным временным рядам, и результаты будут противопоставлены

Часть 3. Применение фрактального анализа

для различных возможных стохастических моделей, исследованных в Главе 5. Анализ рынков будет сопровождаться анализом некоторых экономических данных.

МЕТОДОЛОГИЯ

Мы проанализируем AR(1)-разности логарифмических прибылей для рынков капитала. AR(1)-разности используются для устранения – или, по крайней мере, для сведения к минимуму – линейной зависимости. Как мы видели в Главе 5, линейная зависимость может сместить показатель Херста (и может заставить его выглядеть значимым, когда нет процесса с долговременной памятью) т.е. вызвать ошибку первого рода. Используя AR(1)-разности, мы сводим смещение к минимуму, и, будем надеяться, делаем результаты незначительными. Такой процесс часто называют *предварительным отбеливанием* или *удалением трендов*. Мы будем использовать последний термин. Удаление трендов не подходит для всех статистических испытаний, хотя кажется, что оно используется почти волей-неволей. Для некоторых испытаний удаление трендов может скрыть значимую информацию. Однако в случае R/S-анализа удаление трендов устранил сериальную корреляцию, или кратковременную память, а также инфляционный рост. Сериальная корреляция представляет проблему для очень высокочастотных данных, таких как пятиминутные прибыли. Инфляционный рост является проблемой для низкочастотных данных, таких как 60 лет месячных прибылей. Однако, как мы увидим, для R/S-анализа процесс с кратковременной памятью представляет гораздо большую проблему, чем проблема инфляционного роста. Мы начинаем с ряда логарифмической доходности:

$$S_t = \log(P_t/P_{t-1}) \quad (7.1)$$

где S_t – логарифмическая доходность во времени t

P_t = цена во времени t

Затем мы регрессируем S_t как зависимую переменную против $S_{(t-1)}$ как независимой переменной и получаем отрезок a , отсекаемый на оси, и наклон b . AR(1)-разность S_t вычитает зависимость S_t от $S_{(t-1)}$:

$$X_t = S_t - (a + b * S_{t-1}) \quad (7.2)$$

где $X_t = AR(1)$ остаток S во времени t

Метод AR(1)-разностей не устраняет всю линейную зависимость. Однако Брок, Дечерт и Шейнкман (Brock, Dechert, and Sheinkman, 1987) считали, что он устраняет достаточно зависимости, чтобы свести ее влияние до незначительных уровней, даже если процесс AR находится на уровне 2 или 3.

Затем выполняется R/S-анализ, который начинается с шага 2 из пошагового руководства, приведенного в Главе 4. Мы начинаем с шага 2, потому что шаг 1 уже был описан выше.

Даже на этой ранней стадии существуют значительные различия между этой методологией и той, которая использовалась в работе (Peters, 1991b, 1992). Различия восходят к работе (Peters, 1989). Теперь мы используем только приращения времени,

включающие и начальные и конечные точки; то есть мы используем четные приращения времени. Ранее использовались все приращения времени n . Если в конце оставалось менее n точек данных, они не использовались. Это мало влияло на значения R/S для небольших значений n , поскольку имеется много выборок R/S , и число "оставшихся точек" является небольшим. Например, временной ряд с числом наблюдений $T = 500$ имеет 12 значений R/S для $n = 40$ при 20 неиспользованных наблюдениях, или 4 процентах выборки. Среднее 12 выборок будет хорошей оценкой истинного значения R/S_{50} , а воздействие неиспользованных 20 наблюдений будет минимальным. Однако для $n = 200$ будет только два значения и 100 неиспользованных наблюдений, или 20 процентов выборки. Значение R/S_{200} будет неустойчивым для 500 наблюдений; то есть на значение R/S может повлиять начальная точка. Вследствие этого небольшое количество значений R/S_{200} для временного ряда в 500 наблюдений вводит в заблуждение. Использование значений n , которые используют и начальные и конечные точки (шаг 2 в Главе 4), значительно уменьшает это смещение.

Даже когда этот метод устраняет смещение, он представляет другую проблему. Поскольку мы используем четные приращения времени, нам нужно такое значение T , которое предлагает наибольшее количество делителей, чтобы было приемлемое число значений R/S . Следовательно, нечетные значения T , такие как 499, не должны использоваться. Было бы лучше использовать 450 точек данных с 9 делителями, а не 499 точек с двумя делителями, даже несмотря на то, что 499 точек данных больше 450. Наличие большего количества значений R/S , несомненно, более желательно, чем наличие большего количества точек данных, когда нас интересует масштабирование R/S .

ДАнные

Глава 8 начинается с ряда фактов, взятых из архива ежедневных данных о ценах согласно индексу Доу-Джонса для акций промышленных компаний. Этот ценовой архив, который охватывает период с января 1888 г. по декабрь 1990 г., или 102 года ежедневных данных, содержит 26 520 точек данных. Как мы обсудили выше, большое количество точек данных – это не все, что требуется. Также необходим длительный интервал времени. Кажется, что этот архив выполняет оба требования. Мы будем рассчитывать прибыли для различных горизонтов времени, чтобы проследить, изменяется ли поведение R/S в зависимости от используемого приращения времени. Это предполагает осуществление выборки временного ряда в различных интервалах. С таким длинным рядом мы можем исследовать, может ли "избыточная выборка" привести к смещениям. Мы можем ожидать, что по мере изменения интервала выборки произойдет следующее:

1. Показатель Херста, возможно, увеличится по мере того, как мы будем увеличивать интервал выборки. В более коротких интервалах или при более высоких частотах обязательно будет большее количество шума в данных. Менее частое осуществление выборки должно минимизировать воздействие шума и устранить воздействие любого фрактального шума, который может существовать на более высокой частоте. Как мы видели в функции

Часть 3. Применение фрактального анализа

Вейерштрасса, добавление циклов более высокой частоты делает временной ряд более изрезанным, и таким образом уменьшает показатель Херста (или увеличивает фрактальную размерность). Менее частая выборка "перескакивает" через более высокие частоты.

2. Любые "циклы", которые существуют в более длинных интервалах, должны остаться. Если цикл появляется в 1 000 однодневных интервалов, он все еще должен быть очевиден в 100 десятидневных интервалах.
3. Если процесс представляет собой гауссовы случайные блуждания, первые две точки не сохранятся. Белый шум кажется одинаковым на всех частотах (подобно "шипению", которое мы слышим на магнитофонных лентах и которое звучит одинаково на всех скоростях). И, кроме того, нет никаких циклов. Если разрыв графика R/S появляется в однодневном, а не в десятидневном интервале, разрыв в дневном графике был артефактом, а не истинным циклом.

АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ

Используя длинные временные ряды, мы сможем изучить стабильность R/S -анализа. Грин и Филиц (Green and Fielitz, 1977, 1979) предположили, что R/S -анализ должен идеально подходить ко всем начальным точкам. Это подразумевало бы, что значение R/S может быть средним значением перекрывающихся периодов времени. Нет причины полагать, что этот подход обоснован, хотя, на первый взгляд, он, казалось бы, помогает при наличии короткого набора данных. Однако использование перекрывающихся периодов означает, что оценка R/S_n не является результатом независимой выборки из временного ряда *без возвращения*. Вместо этого выборка осуществляется *с возвращением*. Все испытания на надежность, представленные в предыдущих главах, требуют независимых выборок (без возвращения). Каждый раз, когда мы вычисляем значение R/S для значений n , мы берем выборку. Если эти выборки независимы, мы можем их усреднить и оценить значимость среднего значения R/S для значений n , R/S_n , используя вышеописанные методы. Если для среднего значения мы используем перекрывающиеся интервалы, у нас больше нет инструментов, позволяющих судить о значимости оценки R/S .

В соответствии с более приемлемым подходом R/S -анализ выполняется повторно с другой начальной даты. Получаемые в результате оценки R/S_n и показателя Херста сравниваются с предыдущими оценками, чтобы определить, значительно ли различаются результаты. Ранее определенная статистика может использоваться для оценки значимости. Длинный временной ряд, такой как данные индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний, позволит нам использовать R/S -анализ для интервалов, которые начинаются с промежутком в десять лет. Используя эту методологию, мы можем проверить, значительно ли изменились основные статистические характеристики рынка, а также раз и навсегда проверить, действительно ли рынок подвергается тому типу "структурного изменения", который уже давно используется специалистами по эконометрике в

качестве оправдания.

"Данные о минимальных колебаниях курса" для индекса S&P 500 со 2 января 1989 г. по 31 декабря 1992 г., или данные за четыре года, проанализированы в Главе 9. Эта информация представляет наибольший интерес для трейдеров и может дать десятки тысяч точек данных. Однако необходимо учитывать важные проблемы избыточной выборки и кратковременной памяти. Этот ряд высокочастотных данных предлагает возможность понять, насколько серьезны эти проблемы при анализе "торговых" данных.

В Главе 10 исследуется волатильность, реализованная и прогнозируемая. В отличие от других рядов волатильность антиперсистентна. Мы исследуем две меры волатильности и сравним их.

Инфляция и золото являются предметами Главы 11. В отличие от данных о минимальных колебаниях курса эти временные ряды показывают возможные проблемы недостаточной выборки.

В Главе 12 исследуется валюта, которая известна как рынок с сильными трендами (*strongly trending markets*). Мы обнаружим, что она несколько отличается от других изученных нами инвестиционных механизмов.

Часть 3, прежде всего, связана с выполнением R/S-анализа и соответствующими трудностями; в этой части не рассматривается причина долговременной памяти, а только ее измерение. Возможные причины являются предметом Частей 4 и 5. Существует много потенциальных источников долговременной памяти, и в последних частях книги представлены аргументы в пользу всех из них, в контексте гипотезы фрактального рынка.

Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 1888-1990: идеальный набор данных

ЧИСЛО НАБЛЮДЕНИЙ ПРОТИВ ОТРЕЗКА ВРЕМЕНИ

В этой главе мы проведем обширный анализ индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний (DJIA). Этот широко используемый индекс ежедневно публикуется в газете "The Wall Street Journal" с 1888 г. Архив, с которым мы будем работать, содержит ежедневные цены на акции на момент закрытия биржи по индексу Доу-Джонса для акций промышленных компаний (который для удобства мы будем называть "индексом Доу-Джонса") со 2 января 1888 г. по 31 декабря 1991 г., или 104 года данных. Мы использовали этот архив в Главе 2 при исследовании временной структуры волатильности. Этот архив данных является самым полным архивом, который мы рассмотрим. Он имеет большое количество наблюдений и охватывает длительный период времени. Торговые данные о минимальных колебаниях курса для индекса S&P 500, используемые в Главе 9, включают намного больше наблюдений, но больше наблюдений – не обязательно лучше.

Предположим, что мы имеем систему, подобную циклу солнечных пятен, который длится 11 лет. Наличие годовых одноминутных наблюдений, или 518 400 наблюдений, не поможет нам найти 11-летний цикл. Однако наличие 188 лет месячных чисел, или 2 256 наблюдений, было достаточным для отчетливого выявления 11-летнего цикла в Главе 6.

В архиве данных для индекса Доу-Джонса есть и длина, и число наблюдений, поэтому мы можем многое узнать из этого временного ряда. Все нерабочие дни исключены из временного ряда. Следовательно, пятидневные прибыли составлены на основании пяти операционных дней. Они *необязательно* будут представлять собой календарную неделю с понедельника по пятницу. В этой главе, поскольку мы не будем использовать календарные приращения более одного дня, не будет "недельных", "месячных" или "квартальных" данных. Вместо этого мы будем иметь пятидневные прибыли, 20-дневные прибыли и 60-дневные прибыли.

ДВАДЦАТИДНЕВНЫЕ ПРИБЫЛИ

На рисунке 8.1 показан график R/S в логарифмическом масштабе для данных о 20-дневных прибылях для $T = 1\ 320$ наблюдениям. 20-дневные прибыли по длине составляют приблизительно один календарный месяц. Также представлен график $E(R/S_n)$ (рассчитанный с использованием уравнения (5.6)) в качестве сравнения с нулевой гипотезой, заключающейся в том, что система представляет собой независимый процесс. Очевидно систематическое отклонение от ожидаемых значений.

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

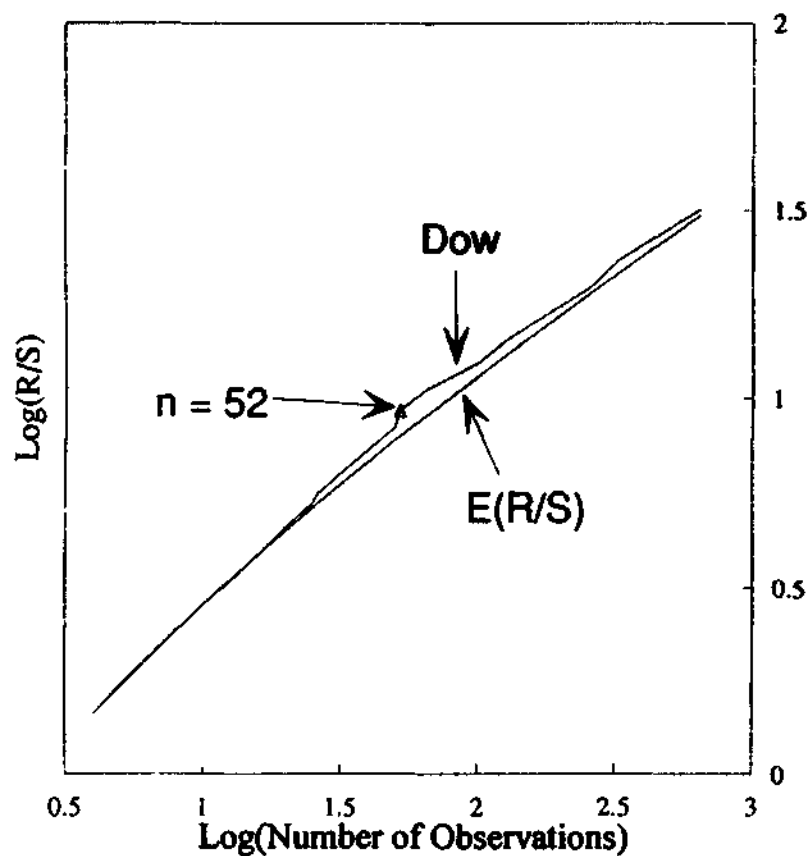


РИСУНОК 8.1 R/S-анализ, промышленный индекс Доу-Джонса: 20-дневные прибыли.

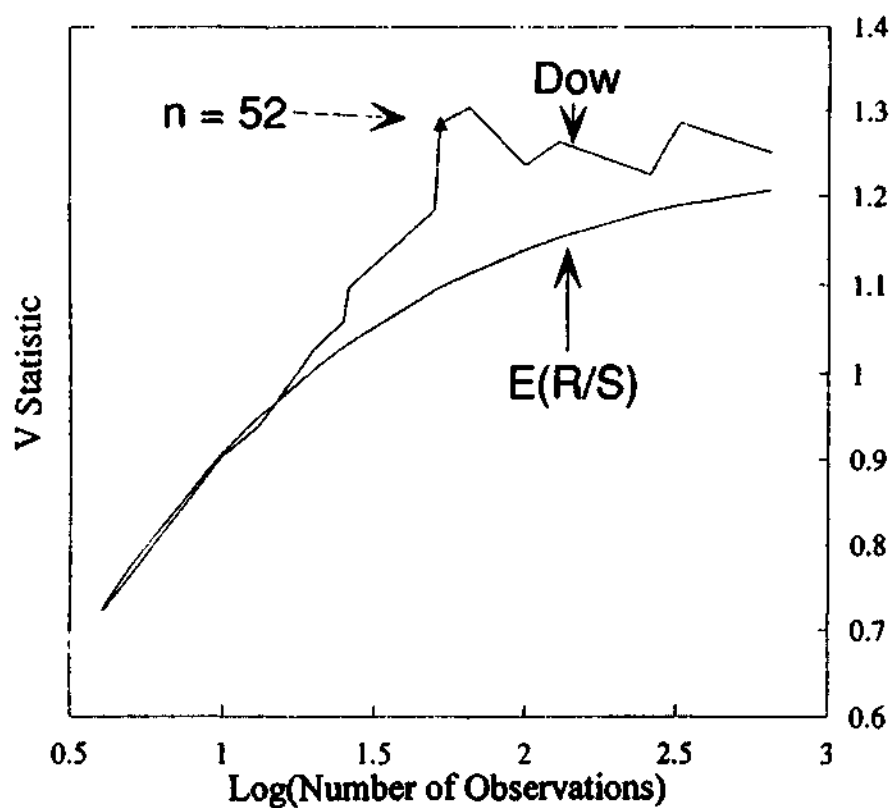


РИСУНОК 8.2 V-статистика, промышленный индекс Доу-Джонса: 20-дневные прибыли.

Часть 3. Применение фрактального анализа

Тем не менее, разрыв в графике R/S наблюдается при 52 наблюдениях ($\log(52) \approx 1.8$). Для точной оценки места этого разрыва мы вычисляем V -статистику с использованием уравнения (6.3) и вычерчиваем ее график против $\log(n)$ на рисунке 8.2. Напомним, что V -статистика является отношением R/S_n к $\sqrt{\{n\}}$. Если ряд проявляет персистентность ($H > 0,50$), то отношение будет увеличиваться. Когда наклон переходит к случайным блужданиям ($H = 0,50$) или к антиперсистентности ($H < 0,50$), отношение, соответственно, будет идти вбок или понизится. На рисунке 8.2 V -статистика явно прекращает расти при $n = 52$ наблюдениям, или 1 040 операционным дням. В таблице 8.1 показаны значения R/S_n и V_n . Пик происходит при $n = 52$. Следовательно, мы построим регрессию, чтобы оценить H для значений R/S_n , $10 \leq n \leq 50$. Результаты приведены в таблице 8.2.

Регрессия выдала $H = 0,72$ и $E(H) = 0,62$. Дисперсия $E(H)$, как показано в уравнении (5.7), представляет собой $1/\Gamma$ или $1/1323$ для гауссовых случайных переменных. Стандартное отклонение $E(H)$ составляет 0,028. Значение H для 20-дневных прибылей по индексу Доу-Джонса на 3,6 стандартных отклонения выше его ожидаемого значения, что представляет собой очень значимый результат.

Результаты регрессии для $n > 50$ также показаны в таблице 8.2. $H = 0,49$, что показывает, что "разрыв" в графике R/S может сигнализировать о периодическом или непериодическом компоненте во временном ряде с частотой, приблизительно составляющей 50 20-дневных периодов. Спектральный анализ графика частоты против степени на рисунке 8.3 показывает невыразительный спектр. Нет никаких периодических компонентов. Следовательно, цикл из 50 периодов или 1000 дней оказывается непериодическим.

Исходя из вышеупомянутого анализа, 20-дневные изменения в цене по индексу Доу-Джонса характеризуются как персистентный процесс Херста с $H = 0,72$. Это значительно отличается от результата для случайных блужданий. Поскольку ряд состоит из $AR(1)$ -разностей, мы знаем, что работает истинный процесс с долговременной памятью. Характеристики этого ряда имеют мало общего с другими стохастическими процессами, исследованными в Главе 4. Особенно они отличаются от рядов $ARCH$ и $GARCH$ (см. Главу 4), которые так часто использовались в качестве моделей рыночных процессов. Однако персистентное масштабирование действительно имеет предельный срок. Оно происходит только в течение тех периодов, которые короче 1 000 операционных дней. Поэтому данный процесс является не процессом бесконечной памяти, а длинной, но конечной памятью с непериодическим циклом, составляющим приблизительно четыре года. Четырехлетний цикл может быть связан с экономическим циклом. Он также кажется связанным с временной структурой волатильности, исследованной в Главе 2. Масштабирование волатильности также прекратилось после четырех лет.

Тем не менее, если этот четырехлетний цикл является истинным непериодическим циклом, а не просто стохастической границей вследствие размера данных, он должен быть независим от периода времени. То есть пятидневные прибыли также должны иметь непериодический цикл в 1 000 операционных дней, или 200 пятидневных периодов.

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

Таблица 8.1 Промышленный индекс Доу-Джонса, 20-дневные прибыли

n	Log(n)	RS, индекс Доу-Джонса	E(R/S)	V-статистика	
				индекс Доу-Джонса	E(R/S)
4	0,6021	0,1589	0,1607	0,7209	0,7239
5	0,6990	0,2331	0,2392	0,7648	0,7757
10	1,0000	0,4564	0,4582	0,9045	0,9083
13	1,1139	0,5288	0,5341	0,9371	0,9486
20	1,3010	0,6627	0,6528	1,0283	1,0053
25	1,3979	0,7239	0,7120	1,0592	1,0305
26	1,4150	0,7477	0,7223	1,0971	1,0347
50	1,6990	0,9227	0,8885	1,1837	1,0939
52	1,7160	0,9668	0,8982	1,2847	1,0969
65	1,8129	1,0218	0,9530	1,3043	1,1130
100	2,0000	1,0922	1,0568	1,2366	1,1396
130	2,1139	1,1585	1,1189	1,2634	1,1533
260	2,4150	1,2956	1,2802	1,2250	1,1822
325	2,5119	1,3652	1,3313	1,2862	1,1896
650	2,8129	1,5037	1,4880	1,2509	1,2067

Таблица 8.2 Результаты регрессии: индекс Доу-Джонса, 20-дневные прибыли

	Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 10 < n < 52	E(R/S) 10 < n < 52	Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 52 < n < 650
Выход регрессии:			
Константа	-0,2606	-0,1344	0,1252
Стандартная ошибка Y (расчетная)	0,0096	0,0088	0,0098
R в квадрате	0,9991	0,9990	0,9979
Число наблюдений	10,0000	10,0000	7,0000
Степени свободы	8,0000	8,0000	5,0000
Показатель Херста	0,7077	0,6072	0,4893
Стандартная ошибка коэффициента	0,0076	0,0072	0,0101
Значимость	3,6262		

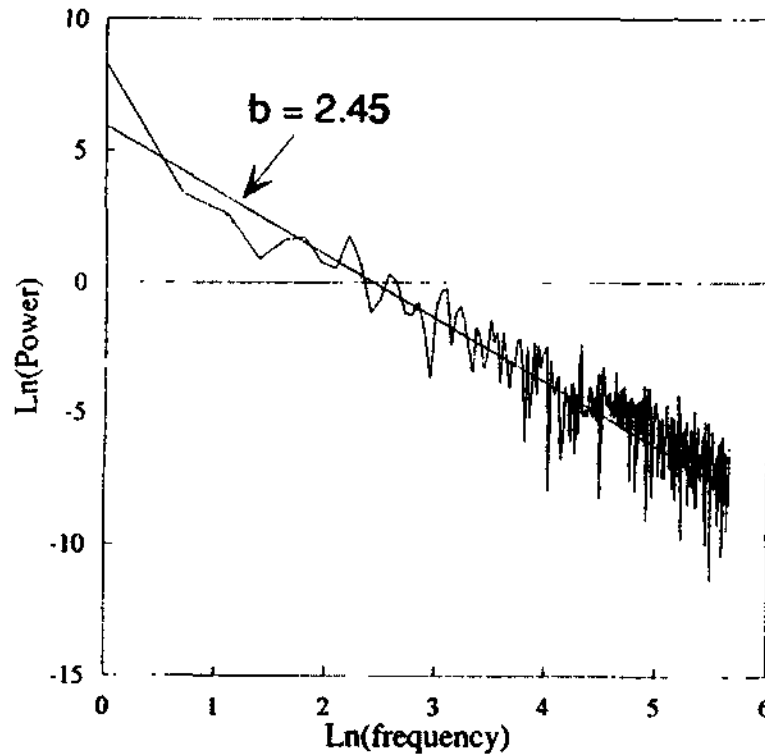


РИСУНОК 8.3 Спектральный анализ, промышленный индекс Доу-Джонса, 20-дневные прибыли.

ПЯТИДНЕВНЫЕ ПРИБЫЛИ

В отношении пятидневных прибылей мы сохранили наш 104-летний временной ряд, но теперь мы имеем 5 280 наблюдений для исследования. Многие чувствуют, что есть циклы короче четырехлетних. Возможно, R/S-анализ может раскрыть эти значения.

На рисунке 8.4 показан график R/S для пятидневных прибылей. И снова мы видим систематическое отклонение от линии E(R/S). Есть также разрыв в графике в логарифмическом масштабе по обеим осям, на сей раз при $n = 208$ наблюдениям. И снова это составляет приблизительно четыре года, показывая, что разрыв в 20-дневном графике R/S не был стохастической границей. На рисунке 8.5 представлен график V-статистики. Опять же, пик ясно виден на уровне приблизительно в четыре года.

В таблице 8.3 приведены значения, используемые в этих графиках. Нет неопровержимого доказательства цикла короче четырех лет. Значения H снова были оценены на основании графика R/S и E(R/S). Результаты регрессии показаны в таблице 8.4. Регрессии строились для $10 \leq n \leq 208$. Пятидневные прибыли имеют более низкое значение H, чем 20-дневные прибыли. Это отражает повышенную степень детализации и уровень "шума" в данных. Поскольку временной ряд более изрезан, показатель Херста ниже. Пятидневные прибыли имеют $H = 0,61$ и $E(H) = 0,58$. Это различие не кажется большим, но дисперсия E(H) теперь составляет 1/5240, или стандартное отклонение в 0,014. Таким образом, пятидневные прибыли по индексу Доу-Джонса имеют показатель Херста, который на 2,44 стандартных отклонений отстоит от среднего значения. Еще раз повторим, что пятидневные прибыли имеют очень значимую величину H.

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

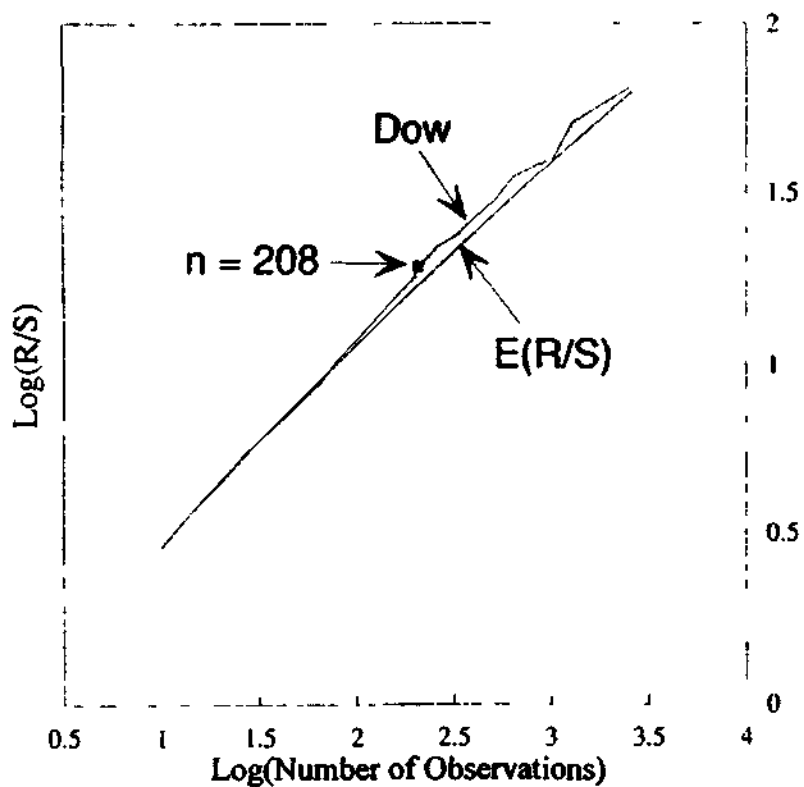


РИСУНОК 8.4 R/S-анализ, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли.

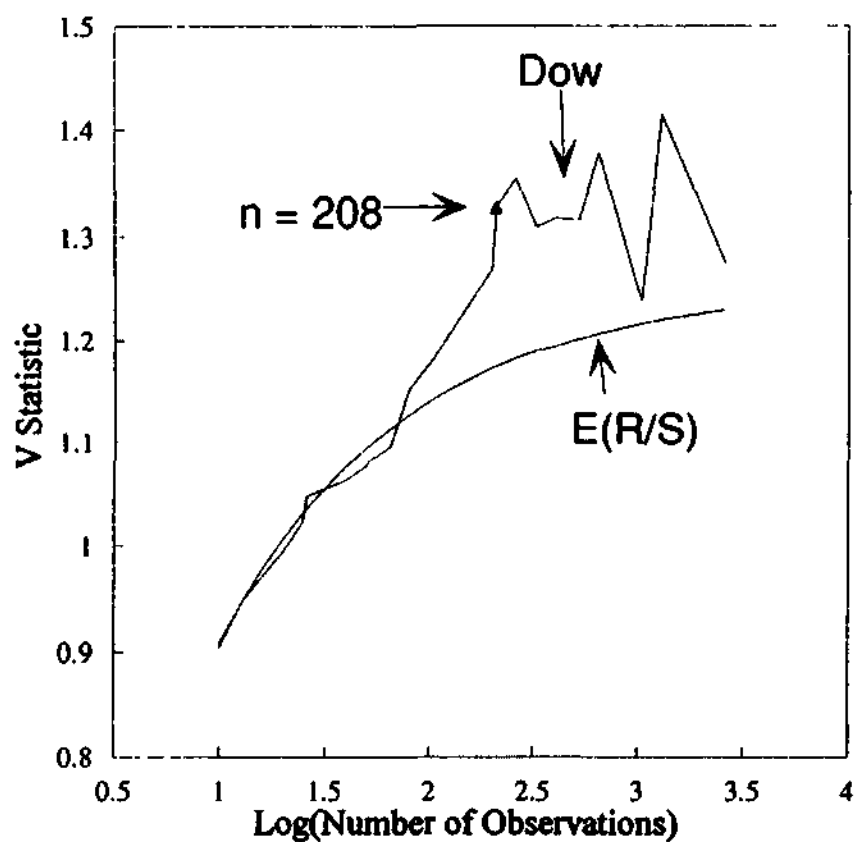


РИСУНОК 8.5 V-статистика, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли.

Часть 3. Применение фрактального анализа

Таблица 8.3 Промышленный индекс Доу-Джонса, пятидневные прибыли

n	Log(n)	R/S, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний	E(R/S)	V-статистика индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний
10	1,0000	0,4563	0,4582	0,9043
13	1,1139	0,5340	0,5341	0,9485
16	1,2041	0,5391	0,5921	0,9706
20	1,3010	0,6176	0,6528	0,9934
25	1,3979	0,7086	0,7120	1,0224
26	1,4150	0,7274	0,7223	1,0468
40	1,6021	0,8272	0,8327	1,0622
50	1,6990	0,8312	0,8885	1,0758
52	1,7160	0,8221	0,8982	1,0817
65	1,8129	0,9157	0,9530	1,0947
80	1,9031	1,0128	1,0033	1,1515
100	2,0000	1,0705	1,0568	1,1764
104	2,0170	1,0305	1,0661	1,1804
130	2,1139	1,1104	1,1189	1,2117
200	2,3010	1,2541	1,2196	1,2693
208	2,3181	1,2319	1,2287	1,3270
260	2,4150	1,3391	1,2802	1,3540
325	2,5119	1,3727	1,3313	1,3084
400	2,6021	1,4206	1,3779	1,3169
520	2,7160	1,4770	1,4376	1,3151
650	2,8129	1,5158	1,4880	1,3783
1.040	3,0170	1,6014	1,5937	1,2384
1.300	3,1139	1,7076	1,6435	1,4145
2.600	3,4150	1,8129	1,7975	1,2748

Наиболее обнадеживающим фактом является то, что даже несмотря на изменение приращения времени, снова появляется четырехлетний цикл. Это обеспечивает дополнительное доказательство того, что цикл не является статистическим артефактом или иллюзией.

Однако мы не смогли найти какие-либо неперiodические циклы с частотами менее четырех лет. Мы увеличим степень детализации и проанализируем однодневные данные.

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

Таблица 8.4 Результаты регрессии

		Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 10 < n < 208	E(R/S), 10 < n < 208
Выход регрессии:			
Константа		-0,1537	-0,1045
Стандартная ошибка Y		0,0076	0,0081
R в квадрате		0,9993	0,9989
Число наблюдений		17,0000	16,0000
Степени свободы		5,0000	14,0000
Показатель Херста	0,6137		0,5799
Стандартная ошибка	0,0043		0,0050
Значимость	2,4390		

ОДНОДНЕВНЫЕ ПРИБЫЛИ

В отношении ежедневных прибылей мы еще раз находим, что показатель Херста уменьшился. Однако E(H) также уменьшилось наряду с дисперсией E(H). Ежедневные данные имеют 24 900 наблюдений, и стандартное отклонение E(H) теперь составляет 0,006. Результаты R/S-анализа показаны на рисунке 8.6.

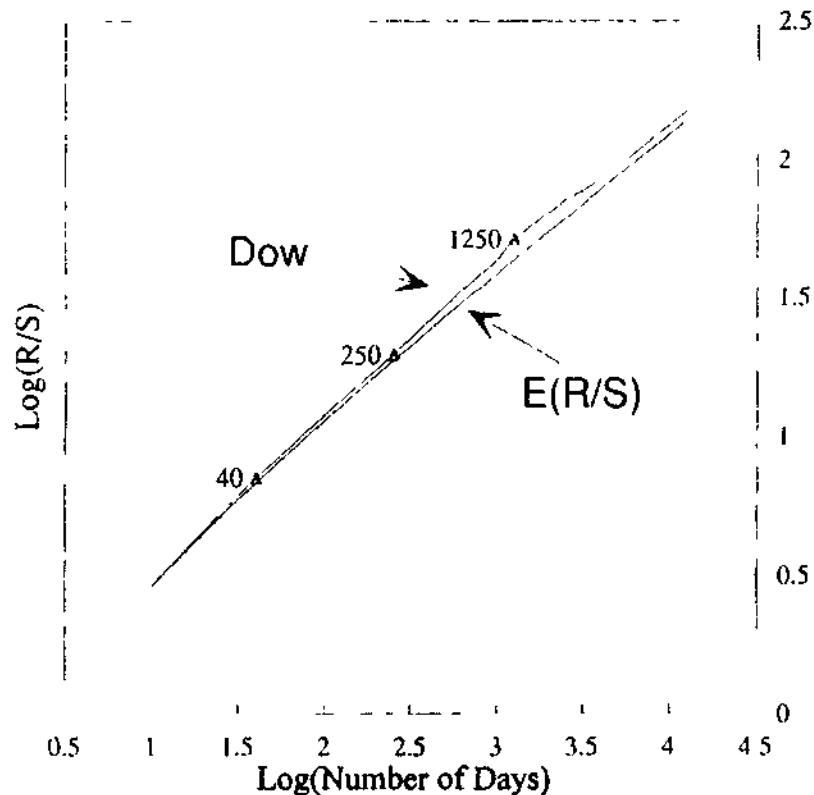


РИСУНОК 8.6 R/S-анализ, промышленный индекс Доу-Джонса, однодневные прибыли.

Часть 3. Применение фрактального анализа

В отношении дневных данных мы снова видим персистентное отклонение наблюдаемых значений R/S от ожидаемых значений R/S согласно нулевой гипотезе о независимости. Мы также видим разрыв в графике R/S на уровне приблизительно 1 000 дней. График V -статистики на рисунке 8.6 показывает, что пик приходится на 1 250 дней, или примерно на четыре года. Это почти точно соответствует циклу в 1 040 дней, найденному для пятидневных и 20-дневных прибылей. При рассмотрении графика V -статистики оказывается, что наклон выше для меньших значений n ($n < 50$), затем становится параллельным в течение некоторого периода, а потом снова начинает расти приблизительно на уровне 350 дней. Мы можем убедиться, действительно ли это имеет место, исследовав разницу между графиками R/S для однодневных прибылей по индексу Доу-Джонса и гауссовым нулем.

Рисунок 8.7 подтверждает, что наклон действительно увеличивается быстрее для $n \leq 40$. Разница становится плоской для значений между 40 и 250, что означает, что местный наклон в этой области выглядит так же, как и случайное блуждание. Наклон резко увеличивается между 250 и 1 250 днями, после чего он снова становится плоским. Эти значения приведены в таблице 8.5. Подобный график с многократными циклами и частотами был приведен для функции Вейерштрасса в Главе 5. Теперь мы можем построить регрессию, чтобы оценить значимость этих визуальных ориентиров.

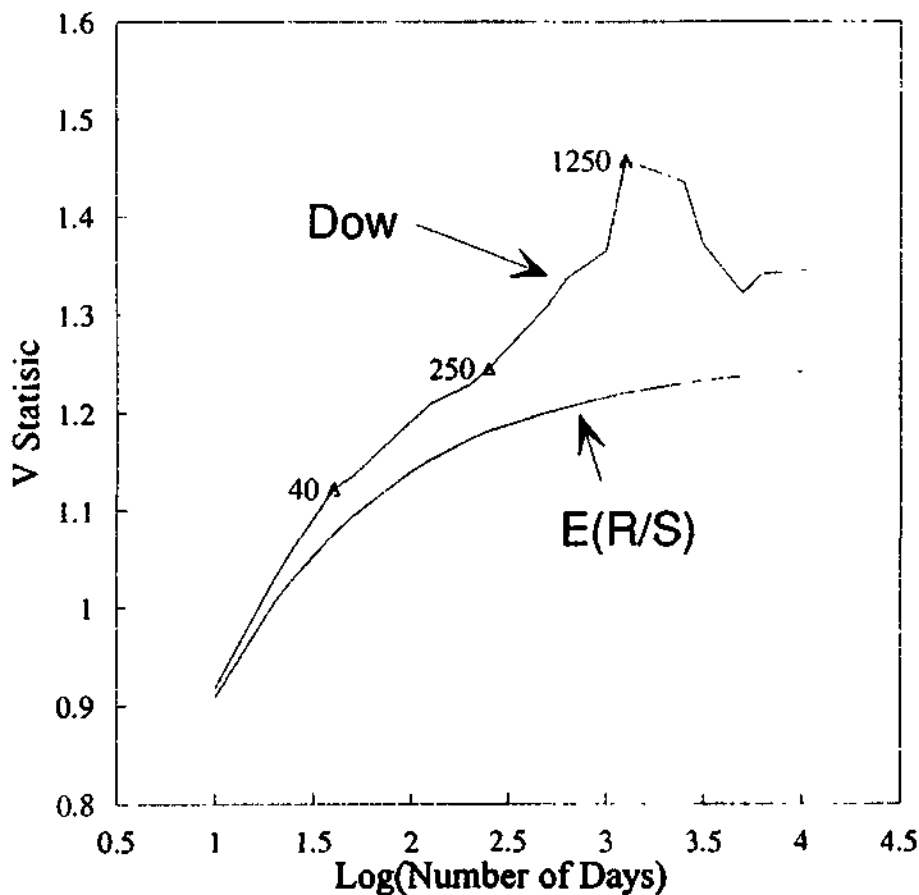


РИСУНОК 8.7 V -статистика, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, однодневные прибыли.

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

Сначала мы вычисляем H для более длинного 1250-дневного цикла. Результаты приведены в таблице 8.6. Однодневный индекс Доу-Джонса имеет $H = 0,58$ и $E(H) = 0,553$. И снова это не выглядит значимым, однако стандартное отклонение $E(H)$ составляет 0,0060 для 24 900 наблюдений. Показатель Херста для однодневного индекса Доу-Джонса отстоит на 4,13 стандартных отклонений от его ожидаемого значения. Опять же, это очень значимый результат.

В Таблице 8.6 также показаны результаты регрессии для подпериодов. Для $10 \leq n \leq 40$, $H = 0,65$, что на первый взгляд кажется очень значимым. Однако короткий конец графика в логарифмическом масштабе по обеим осям также имеет высокий наклон, при этом $E(H) = 0,62$. Тем не менее, это значение $H = 0,65$ все еще на 3,65 стандартных отклонений выше ожидаемого значения и является значимым на уровне 99 процентов.

Следующий подпериод – $40 \leq n \leq 250$, где наклон следовал линии $E(R/S)$. Безусловно, в этой области $H = 0,558$, где $E(H) = 0,551$. Поэтому H отличается от своего ожидаемого значения только на 1,04 стандартных отклонения и является незначимым.

Таблица 8.5 Промышленный индекс Доу-Джонса, однодневные прибыли

n	$\text{Log}(n)$	R/S промышленный индекс Доу-Джонса	$E(R/S)$	V-статистика промышленный индекс Доу-Джонса	$E(R/S)$
0	1,0000	0,4626	0,4582	0,9174	0,9083
0	1,3010	0,6632	0,6528	1,0296	1,0053
5	1,3979	0,7249	0,7120	1,0614	1,0305
0	1,6021	0,8511	0,8327	1,1222	1,0757
0	1,6990	0,9043	0,8885	1,1345	1,0939
00	2,0000	1,0759	1,0568	1,1911	1,1396
25	2,0969	1,1308	1,1097	1,2088	1,1514
00	2,3010	1,2399	1,2196	1,2284	1,1724
50	2,3979	1,2941	1,2711	1,2450	1,1808
500	2,6990	1,4662	1,4287	1,3084	1,2000
625	2,7959	1,5239	1,4792	1,3366	1,2057
1.000	3,0000	1,6351	1,5849	1,3649	1,2159
1.250	3,0969	1,7119	1,6348	1,4570	1,2199
2.500	3,3979	1,8557	1,7888	1,4344	1,2298
3.125	3,4949	1,8845	1,8381	1,3710	1,2323
5.000	3,6990	1,9705	1,9418	1,3215	1,2367
6.250	3,7959	2,0254	1,9908	1,3409	1,2385
12.500	4,0969	2,1775	2,1429	1,3459	1,2428

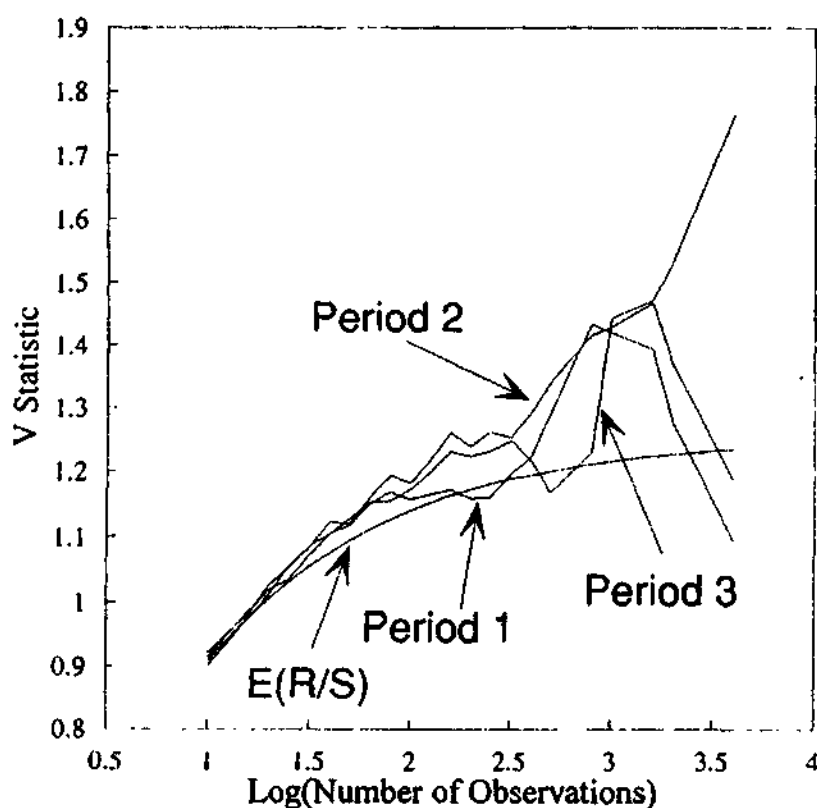


РИСУНОК 8.8 V-статистика, индекс Доу-Джонса, смежные периоды по 8 300 дней.

По мере увеличения n ожидаемое значение H (особенно "локальное" значение) приближается к своему асимптотическому пределу 0,50. В следующем подпериоде, $250 \leq n \leq 1\,250$, $E(H) = 0,52$. Для однодневного индекса Доу-Джонса $H = 0,59$, что на 10,65 стандартных отклонений отличается от среднего значения. Эта высокосignифицирующая величина фактически совпадает с более ранним подпериодом.

В заключительном подпериоде, $1\,250 < n < 12\,500$, локальный показатель Херста снова значительно понижается. В этом диапазоне $H = 0,46$, а $E(H) = 0,51$. Этот показатель Херста также значим, на уровне 95 процентов, потому что он на 7,77 стандартных отклонений ниже своего среднего значения. Поэтому после четырехлетнего цикла процесс становится антиперсистентным. Это соответствует данным, полученным Фамэ и Френчем (Fama and French, 1992), которые заключаются в том, что в долгосрочной перспективе прибыли являются "возвратными к среднему". Мы уже говорили, что антиперсистентный и возвратный к среднему – это не одно и то же (здесь нет среднего значения, к которому можно возвратиться), но, оставив в стороне семантику, мы обращаемся к схожему процессу.

Мы нашли, что индекс Доу-Джонса имеет два неперIODических цикла. Наиболее длинный цикл составляет 1 250 дней, или приблизительно четыре года. Второй цикл составляет 40 дней, или приблизительно два месяца. Эта информация может использоваться различным образом. Наиболее очевидный – в качестве основы для момента и других форм технического анализа. Второе использование заключается в выборе периодов для построения модели, особенно для тестирования на исторических данных (бэк-тестинга).

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

Таблица 8.6 Результаты регрессии

		Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, $0 < n < 1250$	E(R/S), $0 < n < 1250$
Выход регрессии:			
Константа		-0,09126	-0,0635
Стандартная ошибка Y (расчетная)		0,011428	0,013988
R в квадрате		0,999228	0,998732
Число наблюдений		13	13
Степени свободы		11	11
Показатель Херста	0,579		0,553331
Стандартная ошибка коэффициента	0,005		0,005945
Значимость	4,133		
<hr/>			
		Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, $10 < n < 40$	E(R/S), $10 < n < 40$
Выход регрессии:			
Константа		-0,18149	-0,1624
Стандартная ошибка Y (расчетная)		0,004195	0,00482
R в квадрате		0,999553	0,999366
Число наблюдений		4	4
Степени свободы		2	2
Показатель Херста	0,647		0,623532
Стандартная ошибка коэффициента	0,01		0,011109
Значимость	3,648		
<hr/>			
		Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, $40 < n < 250$	E(R/S), $40 < n < 250$
Выход регрессии:			
Константа		-0,0414	-0,04773
Стандартная ошибка Y (расчетная)		0,002365	0,002309
R в квадрате		0,999858	0,999861
Число наблюдений		6	6
Степени свободы		4	4
Показатель Херста	0,558		0,550943
Стандартная ошибка коэффициента	0,003		0,003247
Значимость	1,043		

Часть 3. Применение фрактального анализа

Таблица 8.6 (Продолжение)

		Индекс, Джю-Джонса для акций промышленных компаний, $250 < n < 1250$	E(R/S), $250 < n < 1250$
Выход регрессии:			
Константа		-0,11788	0,024022
Стандартная ошибка Y (расчетная)		0,008376	0,000564
R в квадрате		0,997972	0,999988
Число наблюдений		5	5
Степени свободы		3	3
Показатель Херста	0,588		0,520278
Стандартная ошибка коэффициента	0,015		0,00103
Значимость	10,65		
		Индекс, Джю-Джонса для акций промышленных компаний, $1250 < n < 12500$	E(R/S), $1250 < n < 12500$
Выход регрессии:			
Константа		0,287021	0,062167
Стандартная ошибка Y (расчетная)		0,010672	0,000617
R в квадрате		0,996407	0,99999
Число наблюдений		6	6
Степени свободы		4	4
Показатель Херста	0,459		0,508035
Стандартная ошибка коэффициента	0,014		0,000796
Значимость	-7,77		

АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ

Остаются некоторые вопросы: насколько стабильны эти результаты? Действительно ли они определяются периодом? Эти вопросы особенно важны при рассмотрении экономических и рыночных данных. Существует мнение, что при изменении структуры экономики, ее динамика также изменяется. Для рынков это соображение является чрезвычайно важным, потому что современная технология и преобладающий тип инвестора весьма отличаются от того, чем они были 40 лет назад. Вследствие этой оговорки возникает сомнение, что исследование данных, которые

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

предшествуют текущему периоду, будет полезно. Это походило бы на попытку предсказать текущую погоду на основании данных, собранных в течение ледникового периода. Но в отношении этой мысли существуют контраргументы. В частности, рынок реагирует на информацию, и то, как он реагирует, не сильно отличается от того, как он реагировал в 1930-х гг., даже несмотря на то, что тип информации отличен. Поэтому лежащая в основе динамика и, в частности, статистика рынка не изменились. Это было бы особенно верно для фрактальной статистики.

Чувствительность точки

Вопрос, который часто возникает в отношении R/S-анализа, касается изменения масштаба диапазона локальным стандартным отклонением. Дисперсия фрактальных процессов не определена; исходя из этого, разве мы не изменяем масштаб неустойчивой переменной?

К счастью, ответ – "нет". Поскольку R/S-анализ использует среднее многих значений R/S, чем больше точек мы имеем, тем более устойчивым он становится, пока выборочная частота выше "уровня шума" данных.

Таблица 8.7 Анализ стабильности, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний

		Первые 24.000	Вторые 24.000
Выход регрессии:			
Константа		-0,08651	0,08107
Стандартная ошибка	Y	0,011205	0,012098
(расчетная)			
R в квадрате		0,998942	0,998749
Число наблюдений		37	37
Степени свободы		35	35
Показатель Херста	0,584898		0,580705
Стандартная	ошибка		
коэффициента	0,003218	0,003474	
Значимость	4,543908	3,894397	
		Третьи 24.000	E(R/S)
Выход регрессии:			
Константа		-0,07909	-0,06525
Стандартная ошибка	Y	0,013315	0,011181
(расчетная)			
R в квадрате		0,998472	0,998832
Число наблюдений		37	37
Степени свободы		35	35
Показатель Херста	0,578292	0,555567	0,006455
Стандартная	ошибка		
коэффициента	0,003824	0,003211	
Значимость	3,520619		

Часть 3. Применение фрактального анализа

Для проверки такой чувствительности точки мы повторно провели дневной R/S-анализ с тремя различными начальными точками, расстояние между которыми составляет 1 000 дней, используя 24 000 дней. Результаты приведены в таблице 8.7. В значении или значимости показателя Херста наблюдается незначительное изменение, что указывает на поразительную стабильность.

Таблица 8.8 Чувствительность времени, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний

	Период 1	Период 2
Выход регрессии:		
Константа	-0,106	-0,074
Стандартная ошибка \hat{Y} (расчетная)	0,012	0,019
R в квадрате	0,999	0,997
Число наблк. дней	19,000	19,000
Степени свободы	17,000	17,000
Показатель Херста	0,585	0,565
Стандартная ошибка коэффициента	0,005	0,008
Значимость	2,683	0,894
	Период 3	E(R/S)
Выход регрессии:		
Константа	-0,096	-0,077
Стандартная ошибка \hat{Y} (расчетная)	0,016	0,014
R в квадрате	0,998	0,999
Число наблк. дней	19,000	10,000
Степени свободы	17,000	8,000
Показатель Херста	0,574	0,555
Стандартная ошибка коэффициента	0,006	0,007
Значимость	1,699	

Чувствительность времени

Подходящее испытание основывается на двух или более независимых периодах, которые анализируются по отдельности, а затем сравниваются полученные результаты. Что касается рыночных данных, мы ограничены пределом цикла. Эмпирическое правило подразумевает, что для нелинейного анализа должны использоваться десять циклов информации, как указано в работе (Peters, 1991a, 1991b). Мы имеем 104 года данных и подразумеваемый четырехлетний цикл. Для этого анализа мы разделим период на три части по 36 лет, используя суточные прибыли, или 8 300 наблюдений. Используя только девять, а не десять циклов, мы можем надеяться, что периоды времени будут достаточными.

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

В таблице 8.8 показаны результаты этих трех уравнений. Есть хорошая и плохая новость. Хорошая новость заключается в том, что показатель Херста проявляет поразительную стабильность. В течение первого периода (примерно 1880-1916 гг.) H был равен 0,585, в течение второго периода (примерно 1917-1953 гг.) – 0,565, а в течение последнего периода (примерно 1954-1990 гг.) – 0,574. Плохая новость заключается в том, что, хотя $E(H)$ все еще равняется 0,555, стандартное отклонение увеличилось до квадратного корня из $1/8300$, или 0,011. Это означает, что первый и последний периоды все еще значимы на уровне 5 процентов или выше, но средний период таковым не является. Кроме того, ни 42-дневный, ни четырехлетний цикл не существовали в течение второго периода, как показано на графике V -статистики (рисунок 8.8).

В периоде 3 есть скудный признак 42-дневного цикла, но он является намного более сильным в периоде 1.

Период 2 был наиболее беспорядочным периодом 20-го столетия. Он включал Первую и Вторую мировые войны, большой бум 1920-х гг., депрессию 1930-х гг. и Корейскую войну. Уровень персистентности на рынке, при измерении показателем Херста, является устойчивым, но длины цикла – нет. На них могут влиять политические события, войны и регулирование цен. Техники, остерегайтесь!

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И СЕРИАЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Как мы видели в Главе 5, различные процессы с кратковременной памятью могут вызвать смещение в R/S -анализе. Процессы $AR(1)$, которые, технически, также являются процессами с бесконечной памятью, могут дать результаты, которые выглядят значимыми. В этом разделе мы сравним логарифмические первые разности цен с $AR(1)$ -разностями, чтобы определить, присутствует ли существенная проблема сериальной корреляции в первоначальных данных.

На рисунке 8.9 показан график V -статистики для первоначальных данных против $AR(1)$ -разностей для 20-дневной доходности. В таблице 8.9 приведены значения R/S для двух рядов, а также вычисление показателя Херста. Небольшое смещение $AR(1)$ в первоначальных данных приводит к тому, что значения R/S немного выше, чем при использовании разностей. Вычисление показателя Херста также немного смещено. Тем не менее, выборочная частота, равная 20, уменьшает воздействие сериальной корреляции, как нам уже известно.

На рисунке 8.10 приведен схожий график V -статистики для суточной прибыли. Здесь воздействие более очевидно, но оно все еще однородно. Все значения R/S смещены вверх, так что особенность масштабирования, показатель Херста, мало затронута смещением, хотя смещение определенно присутствует. Таблица 8.10 суммирует эти значения. Данные результаты показывают, что нечастая выборка действительно сводит к минимуму воздействие процесса с кратковременной памятью на R/S -анализ.

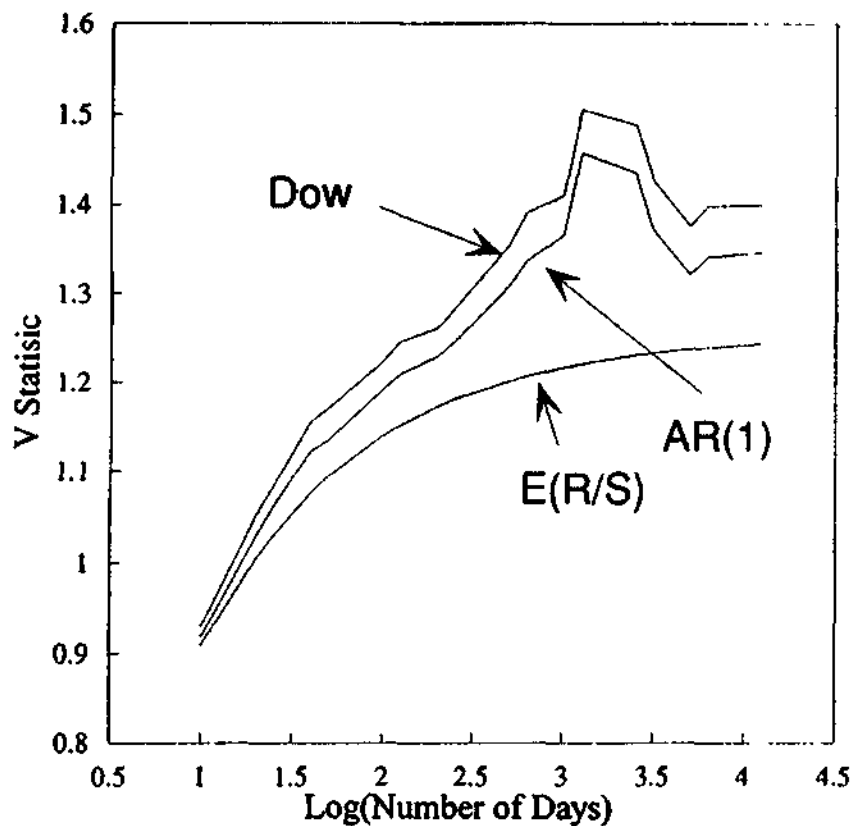


РИСУНОК 8.9 V-статистика, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 20-дневные прибыли.

Таблица 8.9 Значения R/S, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 20-дневные прибыли

Индекс Доу-Джонса	AR(1)	n
2,82	2,75	10
3,42	3,31	13
4,69	4,49	20
5,49	5,23	25
5,59	5,30	26
8,82	8,32	50
9,06	8,52	52
10,08	9,44	65
12,88	12,04	100
14,77	13,83	130
20,99	19,53	260
24,04	22,35	325
34,48	32,07	650

8. Промышленный индекс Доу-Джонса: идеальный набор данных

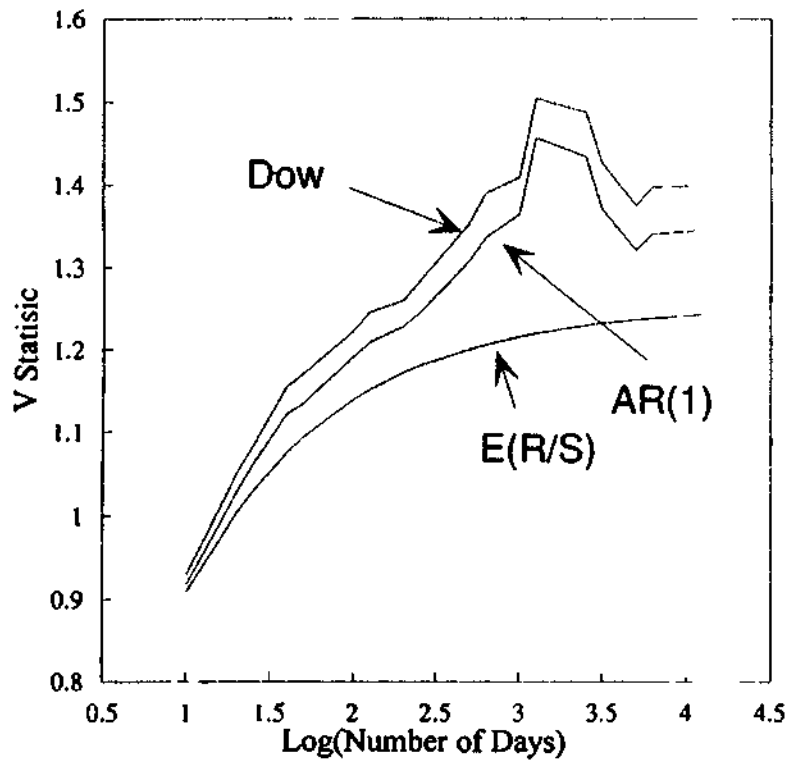


РИСУНОК 8.10 V-статистика, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, однодневные прибыли.

Таблица 8.10 Значения R/S, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, однодневные прибыли

n	R/S значения промышленного индекса Доу-Джонса	AR(1)
10	2,901206	2,939259
20	4,604629	4,701588
25	5,307216	5,413394
40	7,097245	7,307622
50	8,02196	8,274441
100	11,91072	12,22428
125	13,51477	13,92784
200	17,37277	17,83037
250	19,68504	20,28953
500	29,25644	30,27235
625	33,41443	34,75578
1.000	43,16259	44,57676
1.250	51,51228	53,19354
2.500	71,72203	74,38682
3.125	76,64355	79,7547
5.000	93,44286	97,25385
6.250	106,0108	110,5032
12.500	150,4796	156,4324

ВЫВОДЫ

Мы видели убедительное доказательство того, что индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний характеризуется персистентным процессом Херста в течение периодов до четырех лет. Было обнаружено, что четырехлетний цикл независим от приращения времени, используемого для R/S-анализа. Было также найдено менее убедительное доказательство 40-дневного цикла. Показатель Херста был наиболее значим для 20-дневных прибылей и намного менее значим, не являясь при этом незначимым, для однодневных прибылей. "Шум" в данных более высокой частоты делает временной ряд более зазубренным и случайно выглядящим.

Такой временной ряд является примером "идеального" временного ряда для R/S-анализа. Он охватывает длительный период времени и имеет много наблюдений. Эта комбинация позволяет свести к минимуму проблему сверхчастой выборки (и смещения сериальной корреляции). В следующей главе ситуация будет иной.

Кроме того, мы нашли, что показатель Херста поразительно стабилен и испытывает недостаток в значимой чувствительности к изменениям точек и времени во временном ряде индекса Доу-Джонса. Теперь встает вопрос: увеличивается ли уровень "шума" для данных еще более высокой частоты? В следующей главе мы исследуем данные о минимальных колебаниях курса по индексу S&P 500 и альтернативу между большим количеством точек высокочастотных данных и сокращенного промежутка времени для полного анализа.

9

Данные о минимальных колебаниях курса по индексу S&P 500, 1989-1992: проблемы избыточной выборки

В этой главе мы проанализируем большое количество точек данных, которые охватывают короткий период времени. Мы рассмотрим суточные цены по индексу S&P 500, охватывающие четырехлетний промежуток времени. Для большой части широкой публики курсы акций и непонятные символы, непрерывно бегущие внизу экрана телевизора представляют собой квинтэссенцию Уолл-Стрит. В предыдущих поколениях образом Уолл-Стрит был банкир, который смотрит на ленту тикера. В любом случае, инвесторы "играют" на фондовой бирже, интерпретируя быстрое изменение цен. Неудивительно, что общественность путает инвестиции с азартной игрой.

Когда данные упоминаются как высокочастотные данные, это означает, что они охватывают очень короткие горизонты времени и часто имеют место. Высокочастотные данные, как известно, имеют существенные статистические проблемы. Самой главной среди этих проблем являются высокие уровни сериальной корреляции, которые могут исказить и стандартные методы анализа, и R/S-анализ. Использование AR(1)-разностей компенсирует большую часть этой проблемы, но это делает любой анализ сомнительным, независимо от используемых критериев значимости.

Существенное преимущество высокочастотных данных состоит в том, что их много. В стандартном исчислении вероятности, чем больше имеется наблюдений, тем больше проявляется значимость. В отношении данных о минимальных колебаниях курса мы можем иметь более 100 000 одноминутных наблюдений в год, то есть достаточно наблюдений, чтобы обрадовать любого статистика.

Однако большое количество наблюдений, охватывающих короткий период времени не может быть столь же полезно, как несколько точек, охватывающих более длинный период времени. Почему? Предположим, что мы хотели бы проверить, является ли земля круглой или плоской. Мы решили сделать это, измерив искривление расстояния в 500.000 футов, производя выборку один раз на каждые шесть дюймов, что составляет 1 миллион наблюдений. Если бы мы должны были сделать так, нам бы пришлось разглядеть регулярные отклонения, которые встречаются на поверхности земли. Даже в этом случае мы, вероятно, не получили бы показания, которые значительно отличались от показаний плоской поверхности. Таким образом, мы пришли бы к заключению, что земля плоская, даже несмотря на то, что у нас было бы большое количество наблюдений. Проблема состоит в том, что мы исследуем проблему со слишком близкой точки наблюдения.

Точно так же для нелинейной динамической системы число наблюдений не

Часть 3. Применение фрактального анализа

может быть столь же важным, как и период времени, который мы изучаем. Например, возьмите известный аттрактор Лоренца (Lorenz, 1963), который был хорошо описан с концептуальной и графической точки зрения в работе Глейка (Gleick, 1987). Аттрактор Лоренца – динамическая система трех взаимозависимых нелинейных дифференциальных уравнений. Когда параметры установлены на определенных уровнях, система становится хаотической; ее структура становится непериодической. Однако существует глобальная структура, которую с легкостью можно увидеть на рисунке 9.1, где два из трех значений построены в виде графика друг против друга. Результатом является известное изображение "глаза совы". Непериодический цикл этой системы составляет приблизительно 0,50 секунды. Поскольку система непрерывна, можно произвести столько точек, сколько необходимо. Однако при анализе хаотической системы 1 миллиард точек, заполняющих одну орбиту (или 0,50 секунды), не будет столь же полезен, как 1 000 точек, охватывающих десять орбит, или пять секунд. Почему? Существование непериодических циклов может быть выведено, только если мы усредняем достаточное количество циклов вместе. Поэтому нельзя оценить достаточность данных, если мы не имеем представления о длине одного цикла.

В книге (Peters, 1991) было найдено, что индекс S&P 500 имеет цикл, составляющий около четырех лет. В Главе 8 мы видели, что цикл индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний также приблизительно составляет четыре года. Следовательно, наш временной ряд данных о минимальных колебаниях курса может иметь более 400 000 одномоментных наблюдений, но он все равно охватывает только одну орбиту. Что мы можем узнать на основании такого временного ряда? Каковы опасности и преимущества?

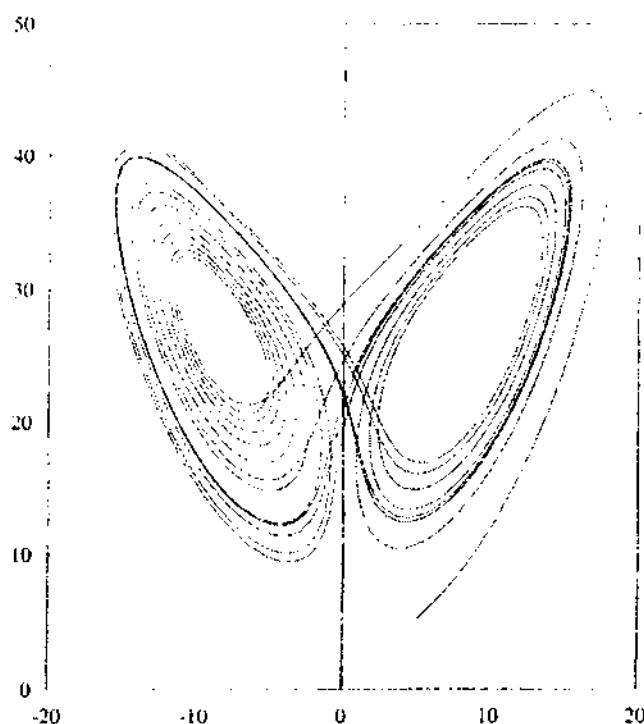


РИСУНОК 9.1 Аттрактор Лоренца.

НЕСКОРРЕКТИРОВАННЫЕ ДАННЫЕ

Нескорректированные данные являются просто логарифмической разностью в цене. Мы исследуем разность при трех частотах: трехминутной, пятиминутной и 30-минутной.

Период с 1989 по 1992 гг. был интересным временем. 1980-ые гг. делали свой последний вздох. Несмотря на ужесточение валютной политики федеральным резервом и инфляцию, 1989 г. начался как год сильного подъема. Существовал высокий уровень оптимизма в отношении того, что федеральный резерв мог спроектировать сценарий "мягкой посадки": постепенно поднять процентные ставки, уменьшить давление инфляции и оставить экономику относительно незатронутой. Фактически, существовало предположение о том, что традиционный деловой цикл был заменен рядом повторяющихся спадов, благодаря чему обширный спад экономической активности ушел в прошлое. Выкуп (LBO) и поглощение компаний за счет заемных средств дошли до новых крайностей после осуществления сделки RJR/Nabisco. На начало 1989 г. повлиял предполагаемый выкуп компании United Airlines по очень завышенной цене. Существовало мнение, что любая компания могла быть выкуплена, и акции должны были оцениваться по "ликвидационной стоимости", а не по балансовой стоимости. Развитие этой идеи прекратилось в октябре 1992 г., вместе с "миникрахом", который сопровождал крах сделки United Airlines.

Спад начался в 1990 г. Иракцы вторглись в Кувейт в тот момент, когда США грозило серьезное замедление темпов экономического развития. Повышение цен на нефть в августе 1990 г. привело к существенному спаду на фондовой бирже. Возможность войны в Персидском заливе принесла высокий уровень неуверенности, что привело к высокой волатильности на рынке. В октябре 1990 г. начался бычий рынок, который имел место в начале 1993 г.

Быстрое и успешное завершение войны в Персидском заливе привело к тому, что 1991 г. был очень благоприятным годом для акций. Однако большинство прибылей было сосредоточено в первом и четвертом квартале, поскольку рынки пытались решить, закончился ли уже спад 1990 г. или нет.

В 1992 г., году президентских выборов, прибыли были посредственными.

На рисунке 9.2(a) приведен график R/S для нескорректированных трехминутных прибылей. График в логарифмическом масштабе по обеим осям показывает существенное отступление от гауссовой нулевой гипотезы. На рисунках 9.2(b) и 9.2(c) приведены аналогичные графики для пятиминутных и 30-минутных прибылей. И снова значимость очевидна. (Интересно отметить, что графики выглядят подобными). Результаты приведены в таблице 9.1. Как и следовало ожидать для такого большого количества наблюдений, результаты высоко значимы. Итоги по графикам V-статистики, приведенным на рисунках 9.3(a) – (c), подведены в таблице 9.1. В данном случае все значения также высоко значимы. Видимых циклов нет, что мы прокомментируем ниже.

Фактически, значения слишком хороши. Принимая во внимание такие сильные тренды, сложно поверить, что кто-то *не* мог делать на них деньги. Когда естественная

Часть 3. Применение фрактального анализа

система, выборка в которой произведена с высокой частотой, показывает высокую значимость, кажется разумным подозревать, что результаты могут искажаться процессом с короткой памятью. В следующем разделе мы узнаем, действительно ли это так.

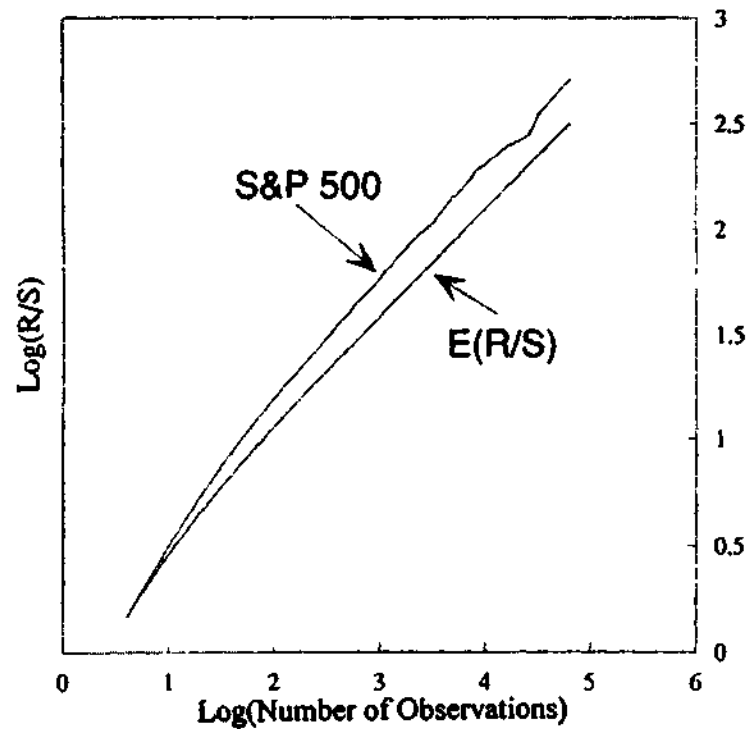


РИСУНОК 9.2а R/S-анализ, S&P 500, нескорректированные трехминутные прибыли: 1989-1992 гг.

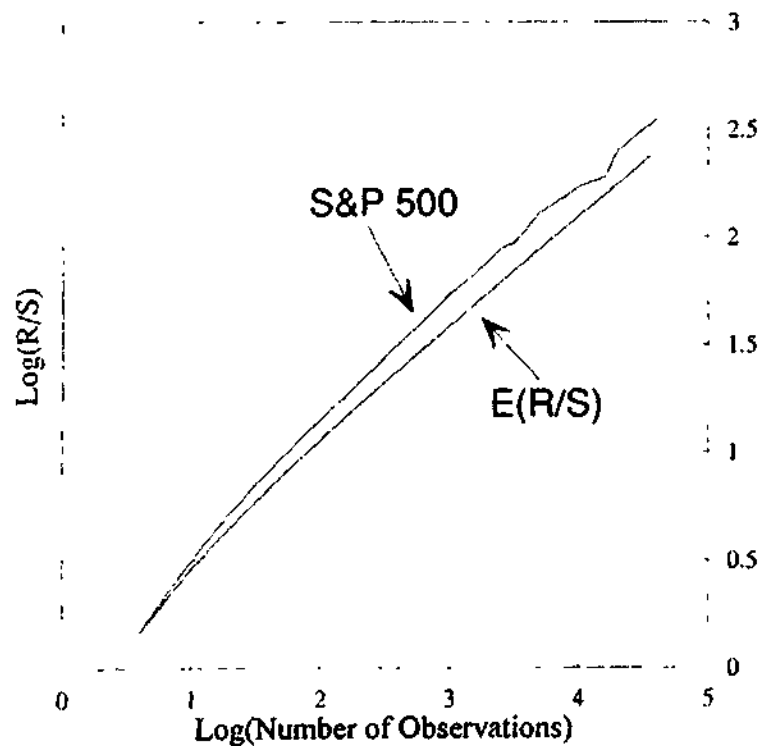


РИСУНОК 9.2б R/S-анализ, S&P 500, нескорректированные пятиминутные прибыли: 1989-1992 гг.

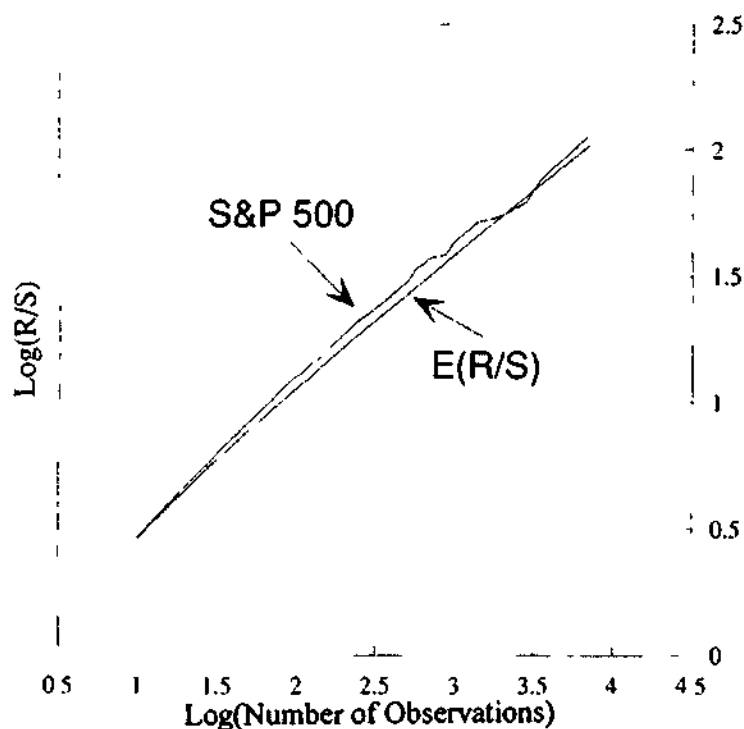


РИСУНОК 9.2с R/S-анализ, S&P 500, нескорректированные 30-минутные прибыли: 1989-1992 гг.

Таблица 9.1 R/S-анализ, первоначальные данные о минимальных колебаниях курсов S&P

Интервал (минуты)	H	E(H)	Значимость
3	0,603	0,538	23,436
5	0,590	0,540	12,505
30	0,653	0,563	10,260

AR(1)-РАЗНОСТИ

В этом разделе мы применим методологию, описанную в Главе 7, и рассмотрим AR(1)-разности. Таким образом, у нас должно получиться свести к минимуму любое влияние кратковременной памяти. Если кратковременная память не является главной проблемой, то наши результаты не должны сильно измениться, как мы видели в Главе 8.

К сожалению, дело обстоит не так. На рисунках 9.4(a) – (c) показаны графики V-статистики для того же самого ряда, теперь с использованием AR(1)-разностей. Все показатели Херста понизились до уровней, которые не сильно отличаются от случайного блуждания. Результаты приведены в таблице 9.2. Например, показатель Херста для трехминутных прибылей равен 0,551, когда гауссов нуль составляет 0,538. Однако число наблюдений является настолько большим (более 130 000), что это небольшое различие является все еще значимым на уровне 99,9 процента. Следовательно, мы можем сделать вывод, что рынки не являются случайными блужданиями, даже на частоте трехминутной прибыли.

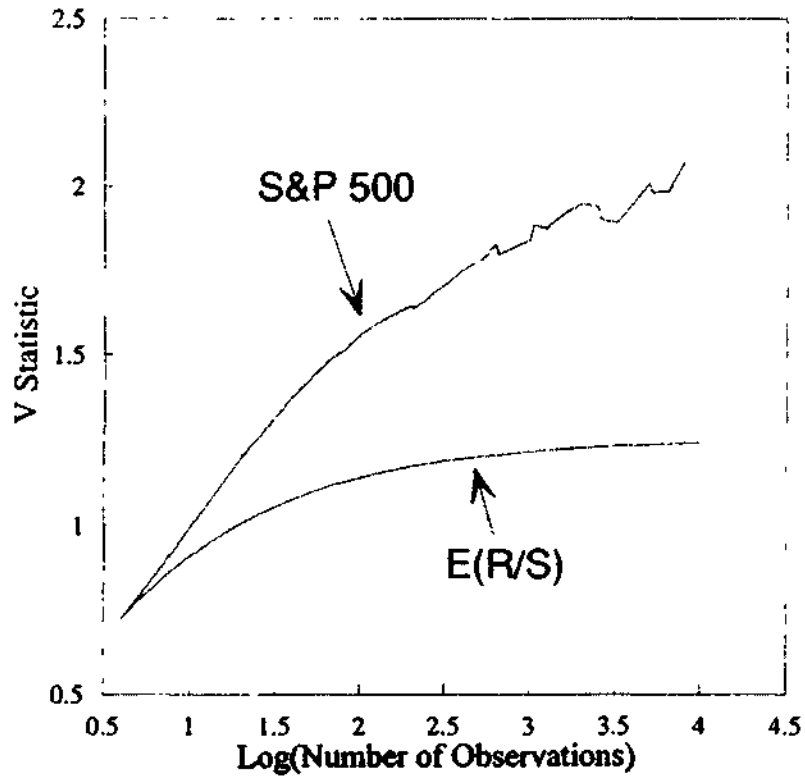


РИСУНОК 9.3а V-статистика, S&P 500, нескорректированные трехминутные прибыли: 1989-1992 гг.

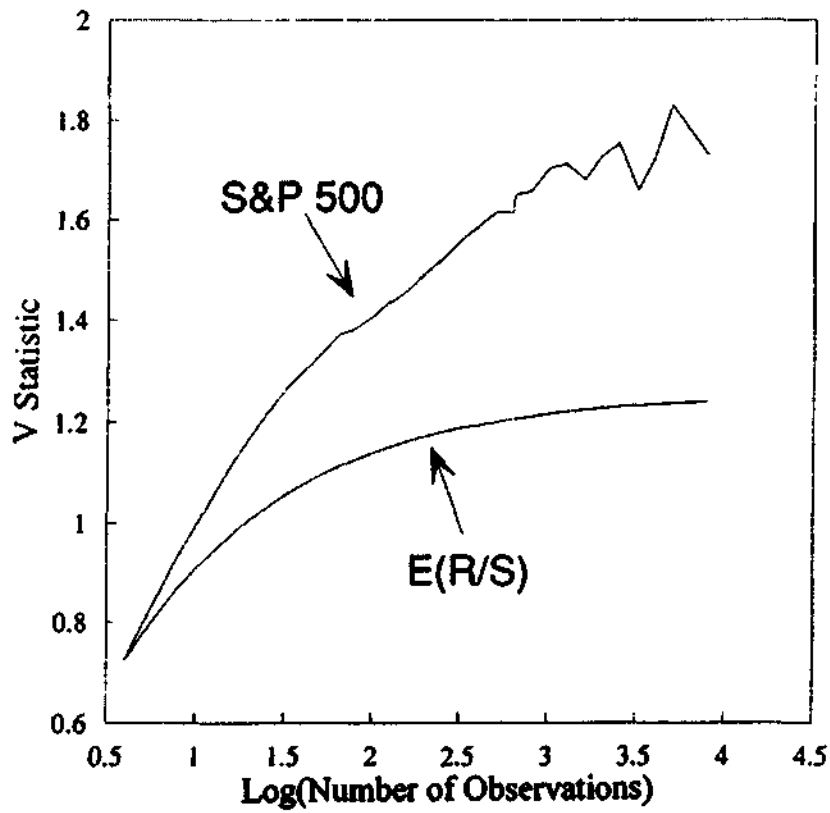


РИСУНОК 9.3б V-статистика, S&P 500, нескорректированные пятиминутные прибыли: 1989-1992 гг.

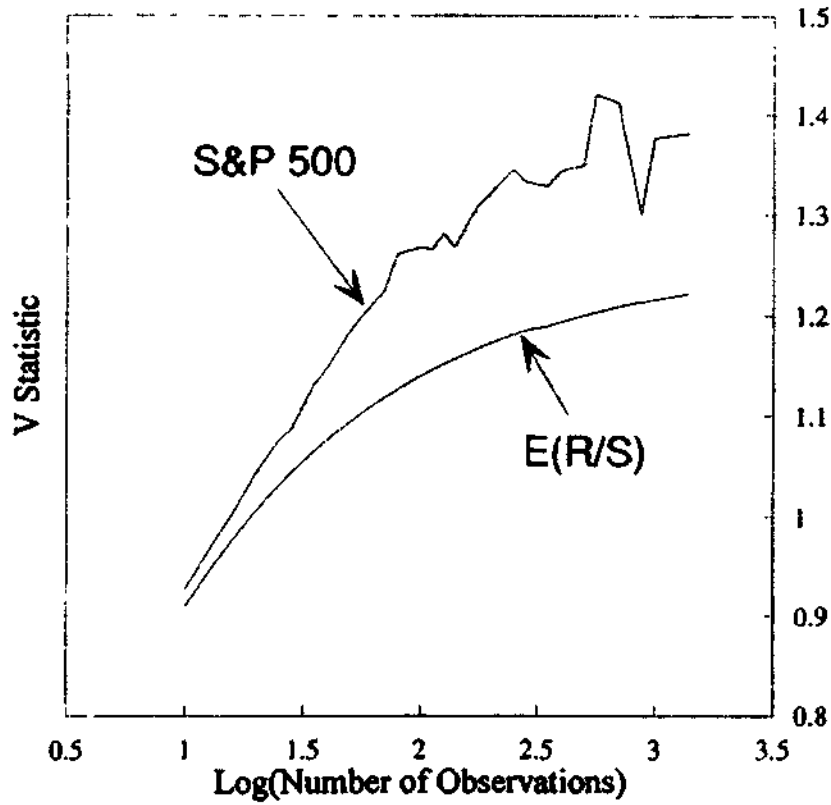


РИСУНОК 9.3с V-статистика, S&P 500, нескорректированные 30-минутные прибыли: 1989-1992 гг.

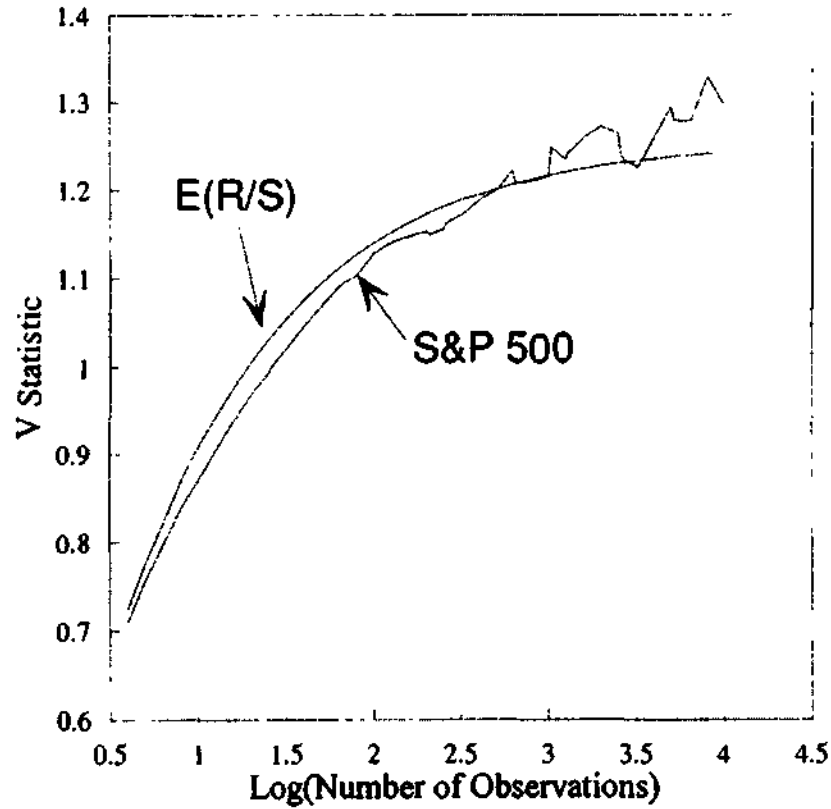


РИСУНОК 9.4а V-статистика, S&P 500, AR(1) трехминутные прибыли: январь 1989 г. – декабрь 1992 г.

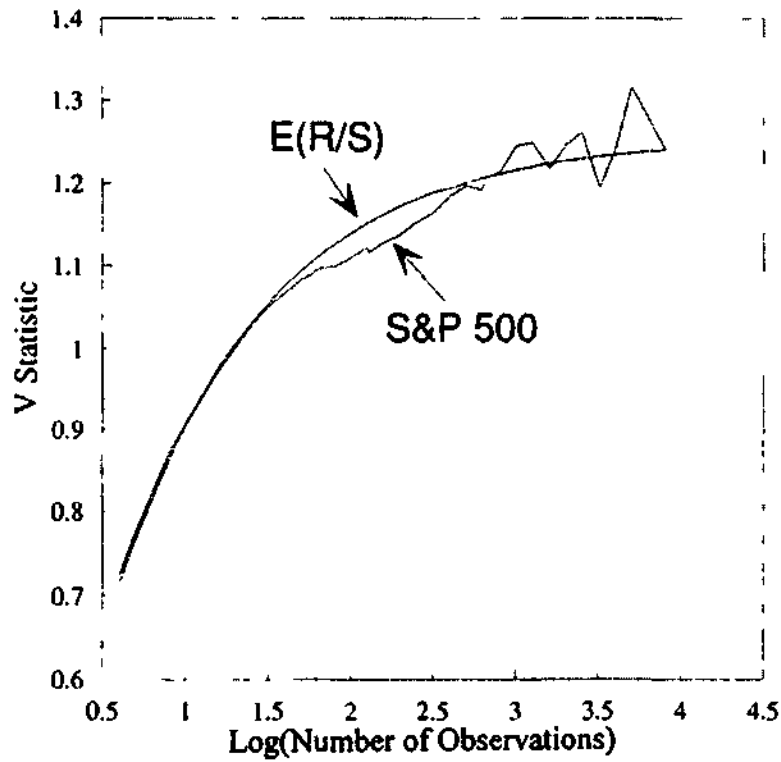


РИСУНОК 9.4b V-статистика, S&P 500, AR(1) пятиминутные прибыли: январь 1989 г. – декабрь 1992 г.

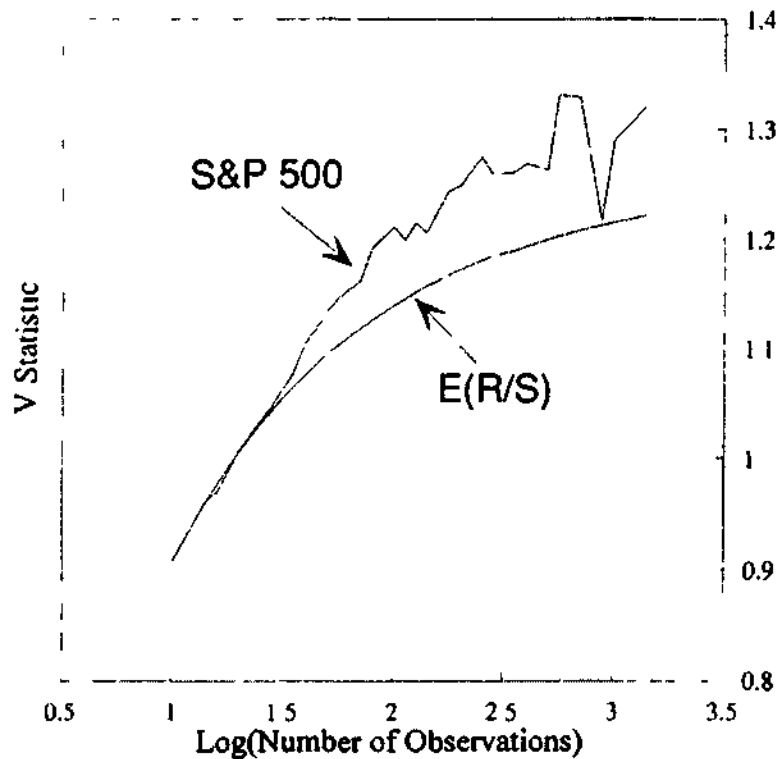


РИСУНОК 9.4c V-статистика, S&P 500, AR(1) 30-минутные прибыли: январь 1989 г. – декабрь 1992 г.

Эта разница различна статистически, но не фактически. Вспомните, что 2-H – фрактальная размерность временного ряда. Фрактальная размерность измеряет,

9. Проблемы избыточной выборки

насколько зазубренным является временной ряд. Следовательно, случайный временной ряд на пятиминутной частоте имел бы ожидаемую фрактальную размерность 1,47, но фактический временной ряд имеет размерность 1,46. Значимое, но низкое число показывает, что на пятиминутной частоте так много шума, что за этим шумом мы едва можем измерить детерминизм. В фактическом временном ряду преобладает процесс с кратковременной памятью (вероятно AR(1)), а не фрактальная система с долговременной памятью. По существу, очень маловероятно, что высокочастотный трейдер может фактически получить прибыль в долгосрочной перспективе.

Таблица 9.2 R/S-анализ, данные о минимальных колебаниях курса, AR(1) S&P

Интервал (минуты)	H	E(H)	Значимость
3	0,551	0,538	4,619
5	0,546	0,540	1,450
30	0,594	0,563	3,665

Интересно, что ни одно испытание не проявляет признаки суточных циклов; то есть на более длинные циклы, описанные в Главе 8, не налагаются высокочастотные циклы. Основываясь на функции Вейерштрасса, проанализированной в Главе 6, мы должны увидеть любые такие циклы при осуществлении выборки на высокой частоте. Тот факт, что ни один из них не обнаруживается, приводит нас к заключению, что на высокой частоте нет детерминированных циклов.

ВЫВОДЫ

Анализ данных высокой и низкой частоты в этой главе и в Главе 8 дал нам некоторые важные представления о рыночных механизмах и о применимости R/S-анализа.

Во-первых, мы увидели, насколько влиятельным может быть процесс кратковременной памяти для R/S-анализа, а также важность использования AR(1)-разностей при анализе систем. Это представляет намного большую проблему для высокочастотных данных, чем для данных низкой частоты. Сравнивая результаты Главы 8 с результатами этой главы, мы можем видеть, что к тому времени, когда мы подходим к дневной частоте, процессы кратковременной памяти оказывают меньше влияния. В отношении ежемесячных прибылей фактически нет никакого воздействия, и мы всегда знали, что избыточная выборка данных может дать статистически ложные результаты, даже в отношении R/S-анализа.

Во вторых, мы получили важное представление об американской фондовой бирже – представление, которое мы можем применить и к другим рынкам, хотя мы оставляем такой анализ для будущих исследований. Как всегда и предполагалось, при анализе на высокой частоте рынки представляют собой некоторую форму авторегрессионного процесса. Эффект долговременной памяти, видимый на высокой частоте, является настолько маленьким, что он едва виден. Таким образом, мы можем

Часть 3. Применение фрактального анализа

сделать вывод, что дэйтрейдеры обладают кратковременной памятью и просто реагируют на последнюю операцию. В Главе 8 мы видели, что такой авторегрессионный процесс намного менее значим при анализе ежедневных данных. Это дает нам некоторый факт, который соответствует фрактальной гипотезе рынка: информация оказывает различное влияние на различных частотах, и различные инвестиционные горизонты могут иметь различные структуры. В этом, действительно, есть локальная случайность и глобальная структура. На высоких частотах мы можем видеть только чистые стохастические процессы, которые напоминают белый шум. Когда мы делаем шаг назад и смотрим на более низкие частоты, глобальная структура становится очевидной.

Мы кратко обсудили аналогичный процесс, названный дифференциацией клеток, в Главе 1. По мере развития зародыша клетки мигрируют к различным местоположениям, в соответствии с чем они становятся клетками сердца, мозга и так далее. Большинство клеток совершает такой переход благополучно, но некоторые клетки в пути погибают. Таким образом, на местном клеточном уровне шансы выживания клетки являются просто вопросом вероятности. Однако глобальная структура, которая служит причиной организации клеток в организм, исключительно детерминирована. Только когда мы исследуем глобальную структуру организма, этот детерминизм становится очевидным.

На рынке данные о минимальных колебаниях курса эквивалентны уровню клеток. Данные представляют собой настолько мелкие частицы, что мы едва можем видеть какую-либо структуру вообще. Только когда мы делаем шаг назад и смотрим на более длинный интервал времени, глобальная структура, сопоставимая с целым организмом, становится очевидной. Таким образом, мы можем понять, как локальная случайность и глобальный детерминизм включены во фрактальный временной ряд.

Волатильность: исследование антиперсистентности

Понятие волатильности очень часто неправильно истолковывается. Для широкой публики она означает турбулентность. Для ученых и последователей ЕМН волатильность является стандартным отклонением изменений курса акций. Оказывается, что оба понятия эквивалентны таким образом, о котором основатели МРТ, вероятно, и не предполагали.

Первоначально стандартное отклонение использовалось потому, что оно измеряло дисперсию процента изменения цен (или прибылей) распределения вероятностей. Распределение вероятностей оценивалось на основании ненормализованных эмпирических данных. Чем больше стандартное отклонение, тем выше вероятность большого изменения цены – и тем рискованнее акция. Кроме того, полагалось (по причинам, обсуждавшимся ранее), что выборка прибылей осуществлялась из нормального распределения. Вероятности могли быть оценены на основании гауссовой нормы. Также предполагалось, что дисперсия была конечна; следовательно, стандартное отклонение стремилось бы к значению, которое было стандартным отклонением совокупности. Стандартное отклонение было, конечно, выше, если временной ряд цен был более изрезан, поэтому стандартное отклонение стало известным как мера *волатильности* акций. Тот факт, что акция, склонная к сильным колебаниям, будет более волатильной и более рискованной, чем менее волатильная акция, казался исключительно разумным. На рисунке 10.1 показано пересчитанное на год стандартное отклонение 22-дневных прибылей для индекса S&P 500 со 2 января 1945 г. по 1 августа 1990 г.

Волатильность стала важной мерой сама по себе благодаря формуле опционного ценообразования Блэка-Шоулса (Black and Scholes, 1973):

$$C = P_s * N(d_1) - S * e^{r(t^*-t)} * N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(P_s / S) + (r + 0,5 * v^2) * (t^* - t)}{v * \sqrt{t^* - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(P_s / S) + (r - 0,5 * v^2) * (t^* - t)}{v * \sqrt{t^* - t}} \quad (10.1)$$

где c = справедливая цена опциона колл

P_s = курс акций

S = цена исполнения опциона

$N(d)$ = интегральная функция плотности нормального распределения

r = безрисковая процентная ставка

Часть 3. Применение фрактального анализа

t = текущая дата

t^* = срок погашения опциона

v^2 = дисперсия доходности акции

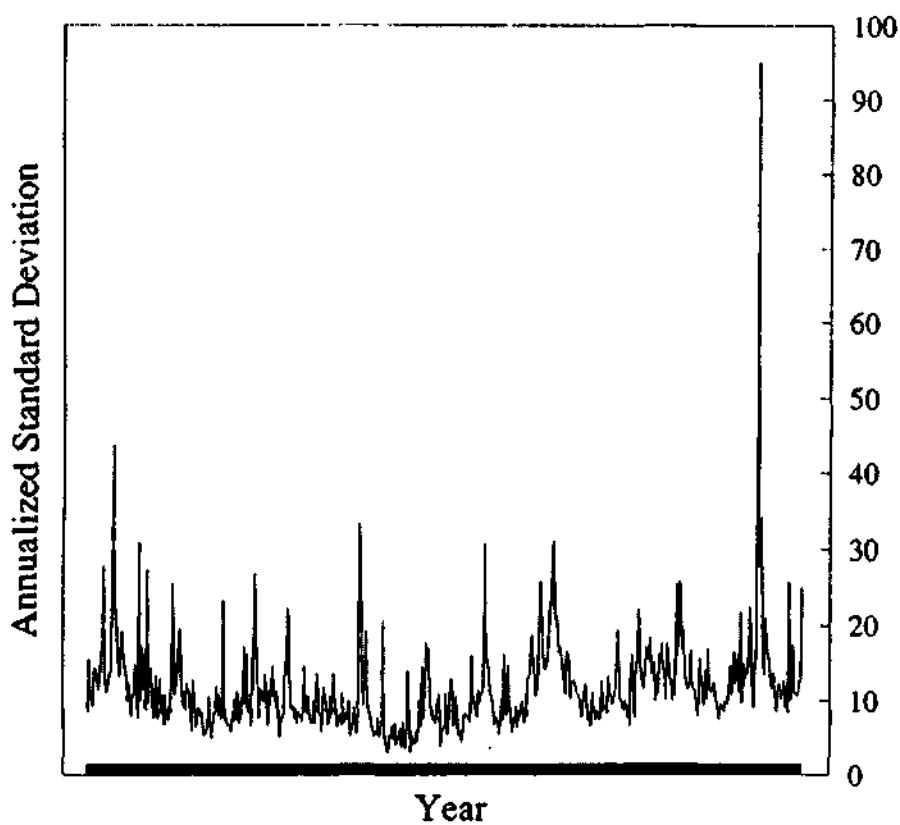


РИСУНОК 10.1 S&P 500, пересчитанное на год стандартное отклонение: 2 января 1945 г. – 1 августа 1990 г.

Цена опциона, определенная на основании этой формулы, чувствительна к числу дисперсии, используемому в пределах вычисления. Кроме того, дисперсия – единственная переменная, которая с уверенностью не известна во время торговли. Опционные трейдеры поняли это и обнаружили, что легче вычислить дисперсию, которая приравнивала текущую цену опциона к другим значениям, чем вычислить "справедливую цену". Такая *подразумеваемая волатильность* стала мерой текущей неуверенности на рынке. Она считалась почти прогнозом фактической волатильности.

По мере того как опционные трейдеры дошли до сути формулы Блэка-Шоулса, они начали покупать и продавать волатильность, как будто она была активом. Во многих отношениях опционная премия стала способом получения прибыли от периодов высокой (или низкой) неуверенности. Волатильность, все чаще и чаще рассматриваемая в качестве товара, начала накапливать свои собственные торговые характеристики. В общем, волатильность считалась "возвратной к среднему". Подъемы волатильности, вероятнее всего, сопровождалась спадами, когда волатильность возвращалась к конечному среднему значению, подразумеваемому из нормального распределения. Волатильность имела свои собственные тренды. Как ни странно, подразумеваемая волатильность была также высоко волатильной, и эта

10. Волатильность: исследование антиперсистентности

характеристика заставила многих задаться вопросом, была ли подразумеваемая волатильность связана с реализованным стандартным отклонением совокупности. На рисунке 10.2 показана пересчитанная на год подразумеваемая волатильность (рассчитываемая ежедневно) со 2 января 1987 г. по 28 июня 1991 г.

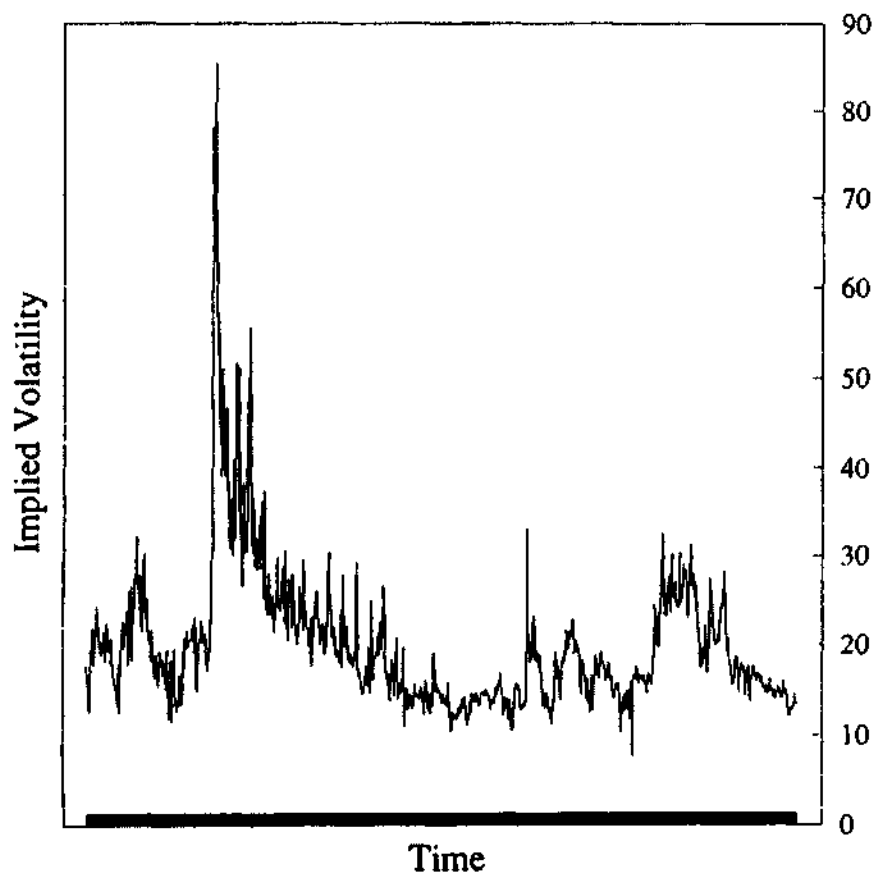


РИСУНОК 10.2 S&P 500, подразумеваемое стандартное отклонение: 2 января 1987 г. – 28 июня 1991 г.

Чтобы проверить эти предположения, мы проверим и реализованную, и подразумеваемую волатильность через R/S-анализ. Являются ли они укрепляющими тренды (trend reinforcing) или возвращаются к среднему значению? Мы исследуем их общие характеристики. В соответствии с общим подходом этой книги мы изучим широкий индекс, S&P 500, который имеет долгую ценовую историю, а также ликвидный опцион. Отдельные акции и другие типы активов предлагается изучить читателю самостоятельно.

Волатильность – интересный предмет для изучения с использованием R/S-анализа, поскольку мы делаем так много предположений о том, что она из себя представляет, и при этом существует так мало фактов, чтобы поддержать наше предположение. Фактически, приведенное ниже исследование должно поставить в тупик тех, кто полагает, что волатильность имеет тренды наряду со стационарностью, или стабильностью. Исследование еще раз ставит под вопрос наше наложение гауссова порядка на все процессы.

РЕАЛИЗОВАННАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ

В моей предыдущей книге давалось краткое исследование волатильности. В этом разделе повторяются полученные там результаты, но с дополнительными объяснениями. Ряд взят из ежедневного архива составных цен S&P с 1 января 1928 г. по 31 декабря 1989 г. Цены преобразуются в ряд логарифмических разностей, или:

$$S_t = \ln(P_t/P_{(t-1)}) \quad (10.2)$$

где S_t = логарифмическая доходность во времени t

P_t = цена во времени t

Волатильность представляет собой стандартное отклонение смежных 20-дневных приращений S_t . Эти приращения являются неперекрывающимися и независимыми:

$$V_n = \frac{\sum_{t=1}^n (S_t - \bar{S})^2}{n-1} \quad (10.3)$$

где V_n = дисперсия за n дней

\bar{S} = среднее значение S

Изменения логарифма рассчитываются как в уравнении (10.2):

$$L_n = \ln(V_n/V_{(n-1)}) \quad (10.4)$$

где L_n = изменение волатильности за время n

Затем выполняется R/S-анализ, как описано в Главе 7. На рисунке 10.3 показан график в логарифмическом масштабе по обеим осям. Итоги подведены в таблице 10.1.

Реализованная волатильность имеет значение $H=0,31$, которое является *антиперсистентным*. Поскольку $E(H) = 0,56$, волатильность имеет значение H , которое на 5,7 стандартных отклонений *ниже* его ожидаемого значения. До этой точки мы не видели антиперсистентных временных рядов в финансах. Антиперсистентность говорит о том, что система меняет свое направление чаще, чем стала бы менять свое направление случайная система. Это соответствует опыту трейдеров, которые находят, что волатильность является возвратной к среднему. Однако термин *возвратный к среднему* подразумевает, что в изучаемой системе и среднее значение и дисперсия стабильны – то есть волатильность имеет среднее значение, к которому она стремится, и она постоянно меняет направление, пытаясь восстановить равновесное значение. Здесь мы не можем сделать такое предположение.

Фактически, в Главе 13 мы найдем, что антиперсистентный показатель Херста связан со спектральной плотностью турбулентного потока, который также является антиперсистентным. Турбулентные системы также описываются устойчивыми распределениями Леви, которые имеют бесконечное среднее и дисперсию; то есть они не имеют уровней среднего или дисперсии, которые могут быть измерены. По смыслу, волатильность будет нестабильна, подобно турбулентному потоку.

10. Волатильность: исследование антиперсистентности

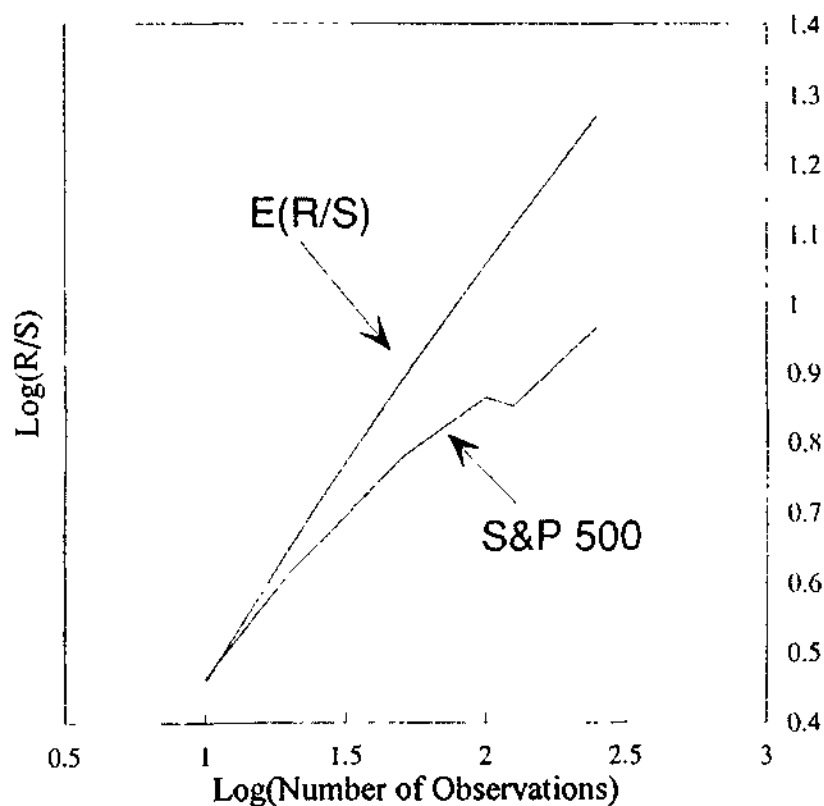


РИСУНОК 10.3 R/S-анализ, реализованная волатильность S&P 500.

Таблица 10.1 Реализованная волатильность

	S&P 500	E(R/S)
Выход регрессии:		
Константа	0,225889	-0,07674
Стандартная ошибка Y (расчетная)	0,021117	0,005508
R в квадрате	0,979899	0,99958
Число наблюдений	6	6
Степени свободы	4	4
Показатель Херста	0,309957	0,564712
Стандартная ошибка коэффициента	0,022197	0,00579
Значимость	-5,69649	

Это означает, что волатильность не будет иметь трендов, но будет часто изменять направление. Такое представление может подразумевать некоторую возможность получения прибыли, но нужно помнить, что изменение направления не является равномерным. Существует большая вероятность того, что за большим увеличением волатильности последует уменьшение *неизвестной величины*. То есть изменение направления с одинаковой вероятностью может быть как меньше, так и больше такого увеличения. Нет гарантии того, что конечное изменение направления будет достаточно большим, чтобы возместить предыдущие потери в игре волатильности.

ПОДРАЗУМЕВАЕМАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ

Реализованная волатильность – статистический артефакт, рассчитываемый как характеристика другого процесса. Подразумеваемая волатильность выходит из формулы. Ее связь с действительностью является мерой того, насколько формула связана с действительностью. Изучение подразумеваемой волатильности во многих отношениях представляет собой проверку предположений формулы Блэка-Шоулса. Если волатильность действительно является конечным процессом, то подразумеваемая волатильность, которая, как предполагается, является мерой мгновенной волатильности, также должна быть конечна и устойчива. Это будет или случайное блуждание, или постоянный ряд, который может быть предсказан, также как и доходность акций.

На рисунке 10.4 показан график в логарифмическом масштабе по обеим осям из R/S-анализа. Итоги подведены в таблице 10.2.

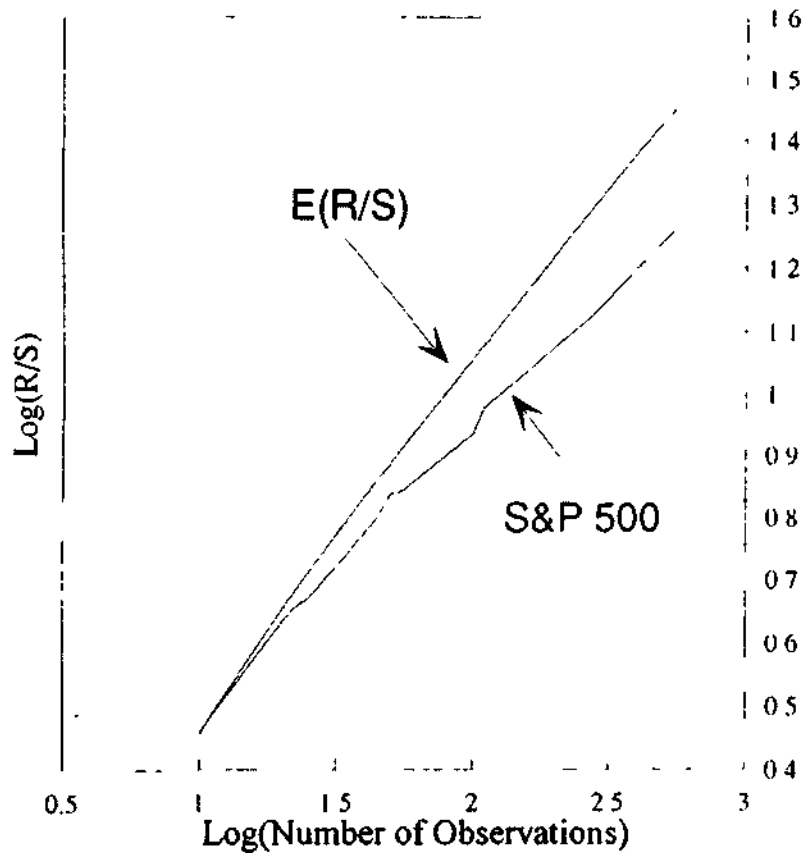


РИСУНОК 10.4 R/S-анализ, S&P 500: подразумеваемая волатильность.

Подразумеваемая волатильность очень схожа с реализованной волатильностью. Она имеет фактически тот же самый показатель Херста, $H = 0,44$, который на 3,95 стандартных отклонений ниже $E(H) = 0,56$. Фактически, существует мало различий между временным рядом подразумеваемой волатильности и временным рядом реализованной волатильности. Однако подразумеваемая волатильность действительно имеет более высокое значение H , что указывает на то, что она ближе к белому шуму, чем реализованная волатильность. С одной стороны, этот факт обнадеживает сторонников использования формулы Блэка-Шоулса для вычисления

10. Волатильность: исследование антиперсистентности

подразумеваемой волатильности. Вычисление подразумеваемой волатильности действительно, охватывает большую часть отношений между волатильностью и опционной премией. Однако это также ставит под вопрос первоначальную практику опционного ценообразования, которая заключается в том, что при оценке "справедливой" цены, основанной на этой формуле, принимается устойчивое, конечное значение дисперсии.

Таблица 10.2 Подразумеваемая волатильность, 1 100 наблюдений

	S&P 500	E(R/S)
Выход регрессии:		
Константа	0,05398	-0,07846
Стандартная ошибка Y (рассчетная)	0,017031	0,010699
R в квадрате	0,994994	0,998767
Число наблюдений	12	12
Степени свободы	10	10
Показатель Херста	0,444502	0,563715
Стандартная ошибка коэффициента	0,00997	0,006264
Значимость	-3,95	

Антиперсистентность имеет интересные статистические характеристики; мы рассмотрим их далее в Главе 14. Кроме того, отношения между персистентным и антиперсистентным временным рядом хорошо иллюстрируются персистентным характером изменений курса акций и антиперсистентностью волатильности. Они оказываются зеркальными отображениями друг друга. Один не существует без другого. Это интригующее отношение будет рассмотрено при обсуждении шумов типа $1/f$ в Главе 13.

ВЫВОДЫ

В этой небольшой главе мы рассмотрели два антиперсистентных ряда: реализованную и подразумеваемую волатильность. Было найдено, что они имеют схожие характеристики. Антиперсистентность характеризуется более частыми изменениями направления, чем это происходит в случайной последовательности. Поэтому антиперсистентность производит $0 < H < 0,50$. Это приводит к $1,5 < D < 2,0$. Это означает, что антиперсистентный временной ряд ближе к заполняющей пространство фрактальной размерности плоскости ($D = 2,0$), чем к случайной линии ($D = 1,50$). Однако это не означает, что процесс является возвратным к *среднему*, это означает только то, что он является возвратным. Антиперсистентность также подразумевает отсутствие устойчивого среднего. Нет ничего, что могло бы изменить его направление, и размер изменений сам по себе случаен.

11

Проблемы недостаточной выборки: золото и инфляция в Великобритании

В Главе 9 мы видели потенциальную проблему избыточной выборки – эффекты искажения данных испытаний на слишком высокой частоте. Среди статистических проблем (сериальная корреляция, например) таится еще одна опасность: чрезмерная уверенность аналитика из-за большого объема выборки. В этой главе рассматривается обратная проблема, недостаточная выборка. Вследствие недостаточной выборки аналитик может принять фрактальный временной ряд за случайный просто потому, что нет достаточного количества наблюдений, чтобы принять уверенное решение.

Существует два типа недостаточной выборки, и каждый из них имеет свои собственные последствия. В той недостаточной выборке, которую мы назовем недостаточной выборкой первого типа, мы получаем показатель Херста, который отличается от случайного блуждания, но мы не можем быть уверены, что результат является значимым, потому что у нас слишком мало наблюдений. Недостаточная выборка второго типа представляет собой "маскировку" персистентности и длины цикла, потому что в цикле слишком мало точек. Процесс переходит в случайное блуждание для небольшого значения n , потому что n охватывает такой длинный отрезок времени.

Каждая из этих ошибок недостаточной выборки будет исследована в свою очередь с использованием данных индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний из Главы 8. Значимая персистентность данных индекса Доу-Джонса, в полной форме, уже была показана при длине цикла в приблизительно 1 000 операционных дней. Позже мы рассмотрим два исследования, которые являются интригующими, но неубедительными из-за недостаточной выборки.

НЕДОСТАТОЧНАЯ ВЫБОРКА ПЕРВОГО ТИПА: СЛИШКОМ МАЛО ВРЕМЕНИ

В Главе 8 мы видели, что показатель Херста для устойчивого, персистентного процесса не сильно изменяется при проверке во времени. Мы рассмотрели три не перекрывающихся 36-летних периода и нашли, что их показатель Херста мало изменился. Если процесс Херста действительно имеет место, ожидаемое значение показателя Херста, на основании уравнения (5.6), при увеличении объема выборки также изменяется незначительно. Что действительно изменяется, так это дисперсия $E(H)$. Дисперсия уменьшается по мере увеличения общего количества наблюдений T . В Главе 9 мы видели, как низкое значение H могло быть статистически значимым при

наличии достаточного количества точек данных.

Аналитик, однако, стоит перед дилеммой. Если сохранен тот же самый период времени, но выборка производится более часто, то существует возможность избыточной выборки данных, как мы видели в Главе 9. Если частота становится слишком высокой, то шум и сериальная корреляция могут скрыть сигнал. В отношении рыночных данных предпочтительно, чтобы выборка производилась ежедневно или через более долгие промежутки времени, чтобы избежать проблемы избыточной выборки. К сожалению, единственной альтернативой высокочастотных данных является более длинный период времени. Не всегда существует возможность получить больше времени, но такой способ является предпочтительным.

Например, возьмем 20 лет пятидневных прибылей согласно индексу Доу-Джонса. Это составляет приблизительно 1 040 точек. Для инвестиционных финансов это кажется адекватной выборкой. Исследуемый период начинается в январе 1970 г. и заканчивается в декабре 1989 г. Результаты R/S-анализа приведены на рисунке 11.1 и в таблице 11.1.

Показатель Херста за 20-летний период подобен показателю, полученному в Главе 8 для 108 лет: $H = 0,63$. $E(H)$ все еще равняется 0,58 и длина цикла все еще появляется на уровне приблизительно 200 недель. Однако дисперсия $E(H)$ теперь составляет $1/1040$ для стандартного отклонения 0,031. Несмотря на тот факт, что практически все значения являются такими же, как и значения в Главе 8, оценка показателя Херста теперь отличается от его ожидаемого значения только на 1,4 стандартных отклонения. К сожалению, это значение недостаточно высокое, чтобы мы могли отклонить нулевую гипотезу. Система все еще может быть случайным блужданием.

Сколько нам нужно точек? Если мы увеличиваем период времени, а не частоту, мы с легкостью можем оценить требования к данным. Если показатель Херста устойчив, то разность между $E(H)$ и H также будет устойчива. В данном случае разность составляет 0,04. Поэтому мы должны знать значение T (общее число наблюдений), которое сделает 0,04 значением двух стандартных отклонений, или:

$$(H - E(H)) / (1/\sqrt{T}) = 2 \quad (11.1)$$

что упрощается следующим образом:

$$T = 4/(H - E(H))^2 \quad (11.2)$$

В этом примере $T = 2 500$ недель, или приблизительно 48 лет пятидневных данных. Для достижения 99-процентного доверительного интервала числитель в правой части уравнения (11.2) должен быть заменен на 9. Нам понадобилось бы 5 625 недель, чтобы достичь значимости на 1-процентном доверительном уровне, если бы H для нового интервала оставался равным 0,62. Нет никакой гарантии, что это случится. H удивительно стабилен во многих, но не во всех случаях.

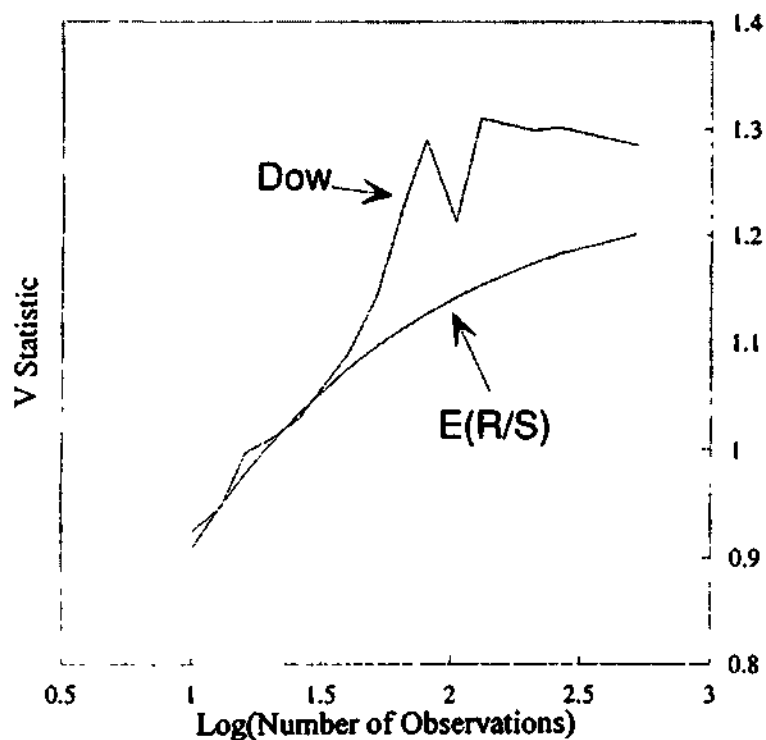


РИСУНОК 11.1 V-статистика, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли: январь 1989 г. – декабрь 1970 г.

Таблица 11.1 Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли, январь 1970 г. – декабрь 1989 г.

		Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний	E(R/S)
Выход регрессии:			
Константа		-0,15899	-0,11082
Стандартная ошибка Y (расчетная)		0,014157	0,008253
R в квадрате		0,97421	0,998987
Число наблюдений		12	12
Степени свободы		10	10
Коэффициент(ы) X	0,626866		0,583597
Стандартная ошибка коэффициента	0,01008		0,005876
Значимость	1,395384		

Такое изменение числителя является разумным, если мы сохраняем ту же частоту выборки, но увеличиваем период времени. Если мы увеличиваем частоту выборки в пределах того же временного интервала, этот подход ненадежен. Например, в Главе 8 мы видели, что увеличение частоты с 20-дневных до пятидневных, а затем до однодневных прибылей изменило значение H с 0,72 до 0,62 и 0,59 соответственно. Увеличение частоты выборки обычно сопровождается увеличением шума и уменьшением показателя Херста. В данном случае, достаточность данных будет увеличиваться с постоянно увеличивающейся скоростью, по мере увеличения выборочной частоты.

НЕДОСТАТОЧНАЯ ВЫБОРКА ВТОРОГО ТИПА: СЛИШКОМ НИЗКАЯ ЧАСТОТА

Предположим, что теперь мы производим выборку индекса Доу-Джонса каждые 90 дней. Для полного набора данных индекса Доу-Джонса это дает нам 295 точек, охватывающих 108 лет. Результаты приведены на рисунке 11.2 и в таблице 11.2. Показатель Херста для четырехлетних циклов не может быть замечен, так как он теперь появляется при $n = 16$. Поскольку мы обычно начинаем в $n = 10$, мы не имеем точек для регрессии. Стандартное отклонение $E(H)$ имеет большое значение, равное 0,058. Эту систему невозможно отличить от случайной системы; единственная альтернатива – увеличить выборочную частоту. Если увеличение частоты не дает значимый показатель Херста, то мы можем сделать вывод, что система не персистентна. Иначе мы не можем быть уверены в том или ином отношении.

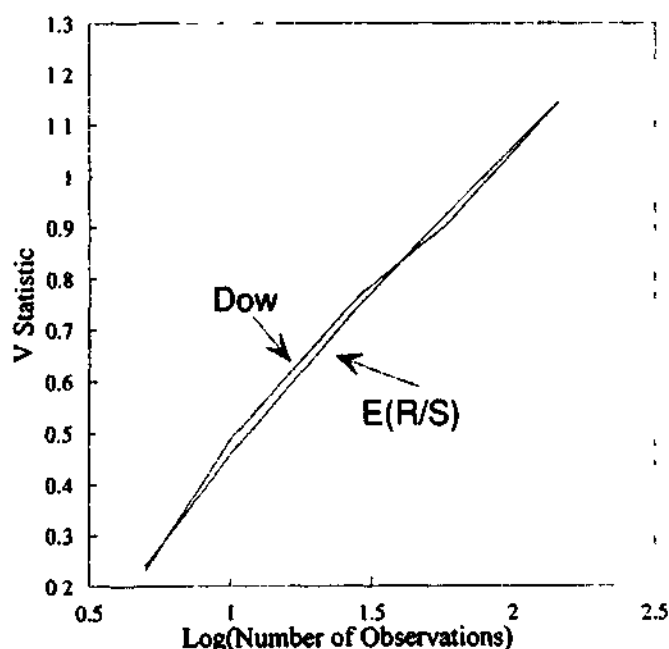


РИСУНОК 11.2 V-статистика, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, 90-дневные прибыли.

Таблица 11.2 Промышленный индекс Доу-Джонса, 90-дневные прибыли

		Промышленный индекс Доу-Джонса	E(R/S)
Выход регрессии:			
Константа		-0,15456	-0,17121
Стандартная ошибка	Y	0,038359	0,021257
(расчетная)			
R в квадрате		0,991328	0,997401
Число наблюдений		5	5
Степени свободы		3	3
Коэффициент(ы) X	0,607872		0,61723
Стандартная ошибка			
коэффициента	0,032825		0,018191
Значимость	-0,16072		

ДВА НЕУБЕДИТЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Я имею два набора данных, которые страдают от проблем недостаточной выборки. Я не старался исправить эти проблемы, потому что исследуемые ряды не представляют важности для моего стиля инвестиционного управления. Тем не менее, поскольку многие читатели интересуются этими временными рядами, я привожу здесь эти неубедительные исследования, чтобы заинтересовать некоторых читателей в их завершении.

Золото

Я располагаю 25-летними данными о еженедельных ценах на золото с января 1968 г. по декабрь 1992 г., что дает 1 300 наблюдений. Результаты R/S-анализа приведены на рисунке 11.3 и в таблице 11.3.

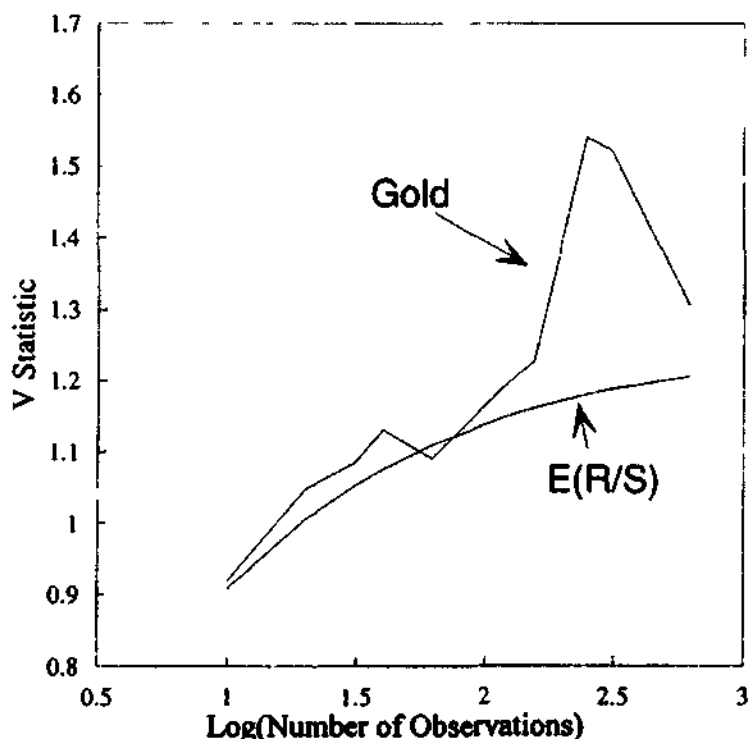


РИСУНОК 11.3 V-статистика, недельный спот на золото: январь 1968 г.—декабрь 1992 г.

Таблица 11.3 Золото

	Золото		E(R/S)
Выход регрессии:			
Константа		-0,15855	-0,10186
Стандартная ошибка Y (рассчитанная)		0,028091	0,010688
R-квадрат		0,992385	0,9987
Число наблюдений		8	8
Степени свободы		6	6
Коэффициент(ы) X	0,624998	1,677234	0,577367
Стандартная ошибка коэффициента	0,022352		0,008504

11. Проблемы недостаточной выборки

График V-статистики на рисунке 11.3 указывает на очевидные 40-недельные и 248-недельные циклы. Длинный цикл подобен четырехлетнему циклу американской фондовой биржи. Более короткий цикл также интригует. К сожалению, показатель Херста не является значимым. $H = 0,62$, а $E(H) = 0,58$. Таким образом, показатель Херста на 1,67 стандартных отклонений выше его ожидаемого значения. Согласно уравнению (11.2) нам нужно 4 444 недели, чтобы достичь значимости. К сожалению, поскольку доллар не отказался от золотого стандарта до 1968 г., мы не можем увеличить интервал времени.

Наша единственная альтернатива заключается в увеличении частоты до ежедневного ценообразования. Очевидно, что это является проблемой недостаточной выборки первого типа.

Результаты относительно золота выглядят интригующими, но нуждаются в дальнейшем изучении.

Инфляция в Великобритании

Один из читателей моей предыдущей книги прислал мне статью из журнала *The Economist* за 1976 г., в которой были приведены ежегодные оценки британской инфляции с 1662 по 1973 гг. – за более чем 300 лет. Хотя это очень длинный временной ряд, ежегодная частота делает его классической проблемой недостаточной выборки второго типа. В США инфляция, как оказывается, имеет пятилетний цикл, так же как и американская экономика (Peters (1991a)). Если Великобритания имеет схожий цикл, он бы не был замечен из-за нечастой выборки.

Результаты R/S-анализа приведены на рисунке 11.4 и в таблице 11.4. Этот ряд фактически неотличим от случайного. Само собой разумеется, что, подобно американской инфляции, британская инфляция должна иметь тренды и циклы, но эти данные не поддерживают эту идею.

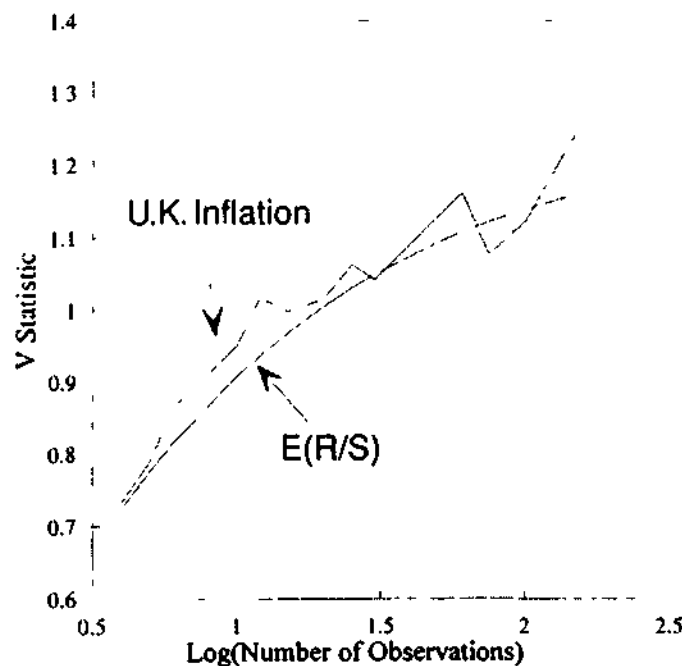


РИСУНОК 11.4 V-статистика, ежегодная инфляция в Великобритании: 1662-1973 гг.

Часть 3. Применение фрактального анализа

Таблица 11.4 Инфляция в Великобритании

		Инфляция в Великобритании	E(R/S)
Выход регрессии:			
Константа		-0,17106	-0,18656
Стандартная ошибка Y (расчетная)		0,006444	0,001442
R в квадрате		0,996196	0,999803
Число наблюдений		4	4
Степени свободы		2	2
Коэффициент(ы) X	0,656017		0,645863
Стандартная ошибка коэффициента	0,028665		0,006414
Значимость	0,175883		

ВЫВОДЫ

В этой главе мы исследовали два типа проблем недостаточной выборки. В недостаточной выборке первого типа слишком мало времени, чтобы поддерживать частоту выборки. Предпочтительное решение, если первая оценка показателя Херста выглядит многообещающей, состоит в том, чтобы увеличить интервал времени и поддерживать постоянной выборочную частоту. Таким образом, может быть рассчитана аппроксимация к достаточности данных.

В недостаточной выборке второго типа частота осуществления выборки слишком низка, что приводит к пропуску циклов. При наличии достаточных ресурсов такие проблемы обычно можно компенсировать. Иногда, однако, характер набора данных не поддается исправлению.

Валюта: истинный процесс Херста

Как мы говорили в предыдущих главах, валюта часто путается с ценными бумагами. Когда трейдеры покупают и продают валюту, они не реализуют инвестиционный доход непосредственно на валюте. Вместо этого, валюта покупается и продается, чтобы вложить капитал в ценные бумаги с краткосрочной процентной ставкой в выбранной стране. "Стоимость" валюты не обязательно связана с деятельностью в основной экономике страны. Валюта связана с относительными движениями процентной ставки в двух странах. Кроме того, сами рынки управляются соответствующими правительствами по причинам, которые нельзя считать "рациональными" с точки зрения эффективного рынка. Например, если страна хочет стимулировать экспорт, она позволит, или даже поощрит, падение стоимости своей валюты. С другой стороны, если она хочет поощрить импорт и уменьшить свое активное сальдо торгового баланса, она захочет повысить курс своей валюты. Обе цели могут быть желательными, независимо от того, находится ли страна в кризисе или на подъеме.

Существует два способа, которыми центральный банк страны может управлять валютой. Во-первых, он может повысить или понизить процентные ставки, делая правительственные ценные бумаги более или менее привлекательными для иностранных инвесторов. Поскольку эта альтернатива может повлиять на общий экономический рост страны, она обычно используется в крайнем случае, даже несмотря на то, что она имеет самый длительный эффект.

Второй метод является более прямым и обычно происходит, когда валюта достигла уровня, который центральный банк считает приемлемым. Центральные банки обычно покупают или продают валюты в больших количествах, чтобы управлять стоимостью валюты. Иногда самым крупным трейдером на рынке валюты может быть центральный банк, который не ставит своей целью максимизацию прибыли.

Вследствие этих двух факторов рынки валюты отличаются от других торговых (traded) рынков. Например, они на самом деле не являются "рынком капитала", потому что цель торговли валютой состоит не в увеличении капитала, а в создании способности торговать акциями и облигациями, которые являются реальными рынками для увеличения капитала. Валюта представляет собой "чистые" вторичные рынки, потому что они действительно являются игрой с нулевым исходом. На фондовой бирже стоимость активов повышается и понижается вместе с экономикой. Процентные ставки также повышаются и понижаются в обратной зависимости от экономики. Обе взаимосвязи удивительно устойчивы. Однако валюта не имеет устойчивых взаимосвязей с экономикой. Будучи чистым вторичным рынком, валюта более склонна следовать причудами и моде. Короче говоря, валюта следует за

Часть 3. Применение фрактального анализа

поведением толпы таким образом, который принят для рынков акций и облигаций.

До сих пор мы исследовали рынки, которые имеют некоторую связь с экономической деятельностью. Акции, облигации, и (вероятно) золото имеют неперiodические циклы, которые обладают средней длиной. Эта последняя характерная черта тесно связана с нелинейными динамическими системами и фрактальной гипотезой рынка. Однако чистый процесс Херста, как обсуждалось в Части 2, не имеет средней длины цикла. Выпадение "джокера" – случайное событие, которое может случиться в любое время. Поскольку выборка случайных чисел из вероятностной колоды карт происходит с возвращением, вероятность появления джокера со временем не увеличивается. Изменение "смещения" действительно происходит случайным образом.

На рынке валюты мы видим как раз такие характеристики. В Главе 2 мы видели, что временная структура волатильности для обменного курса иена/доллар отличалась от таковой для американских акций и облигаций. В Главе 4 мы рассмотрели признаки персистентного показателя Херста для обменного курса иена/доллар. В этой главе мы исследуем этот и другие обменные курсы более подробно. Исследование будет все еще ограничено.

Возможно, что помимо валюты другие "вторичные рынки" также являются чистыми процессами Херста, особенно товарные рынки, такие как рынки свинины, которые, как известно, находятся во власти спекулянтов. Другие исследователи, я надеюсь, займутся изучением этих рынков.

ДААННЫЕ

Рынки валюты могут подвергнуться действию проблемы недостаточной выборки первого типа. Подобно золоту, валютные колебания в США не происходили в свободной рыночной среде до одного политического события – в данном случае, события при администрации Никсона: введения плавающего курса доллара США и других валют в результате Бреттонвудского соглашения 1972 г. После Второй мировой войны доллар США стал мировой валютой. Иностраные обменные курсы были установлены относительно доллара США соответствующими правительствами. Однако в конце 1960-х гг. глобальная экономика достигла другого состояния, и развилась текущая структура плавающих курсов, управляемых центральными банками. Поэтому мы имеем данные менее чем за 20 лет. На американской фондовой бирже 20 лет ежедневных данных недостаточно для того, чтобы достичь статистически значимого показателя Херста. Если ежедневные курсы обмена валюты не имеют более высокий показатель Херста, чем американская фондовая биржа, мы не можем достичь значимости. К счастью, это действительно, как оказывается, имеет место.

ИЕНА/ДОЛЛАР

Мы уже исследовали некоторые аспекты обменного курса иена/доллар в Главах 2 и 4. Этот обменный курс, наряду с обменным курсом марка/доллар, чрезвычайно

12. Валюта: истинный процесс Херста

интересен. С одной стороны, в отношении его осуществляется очень много торговых операций, начиная с 1972 г. Послевоенные отношения между США и Японией и последующее развитие США как крупнейшего потребителя японского экспорта привели к тому, что обменный курс между этими двумя странами характеризовался одним длинным понижением в отношении доллара. Поскольку торговый дефицит между этими двумя странами продолжает расширяться, стоимость американской валюты продолжает уменьшаться. R/S анализ должен дать нам понимание структуры этого пристально наблюдаемого рынка, на котором ведется активная торговля.

В таблице 12.1 приводятся результаты, а на рисунке 12.1 показан график V-статистики для этой валюты. Показатель Херста выше значения для ежедневных американских акций, при этом $H = 0,64$. Этот период имеет 5 200 наблюдений, так что оценка более чем на три стандартных отклонения выше ее ожидаемого значения. Следовательно, она в высокой степени персистентна по сравнению с фондовой биржей. Однако не видно никакого долгосрочного цикла. Это согласуется с временной структурой волатильности, которая также не имеет очевидного снижения риска. Поэтому мы можем сделать вывод, что обменный курс иена/доллар совместим с дробным броуновским движением, или процессом Херста. Однако в отличие от рынка акций и облигаций не наблюдается переход к долговременной "фундаментальной" оценке. На всех инвестиционных горизонтах продолжает доминировать техническая информация. На основании этого мы могли бы предположить, что этот процесс является истинной "бесконечной памятью", или процессом Херста, в противоположность процессу с долгой, но конечной памятью, который характеризует рынки акций и облигаций.

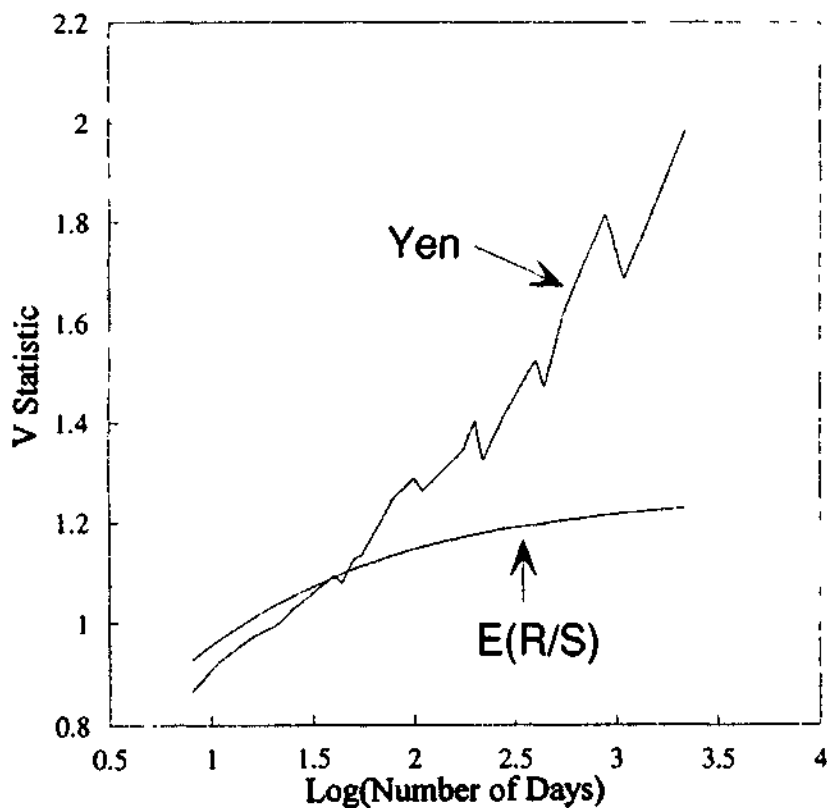


РИСУНОК 12.1 V-статистика, иена, дневные данные, январь 1972 г. – декабрь 1990 г.

Часть 3. Применение фрактального анализа

Таблица 12.1 R/S-анализ

		Иена	
Выход регрессии:			
Константа			-0,187
Стандартная ошибка \hat{Y} (расчетная)			0,012
R в квадрате			0,999
H		0,642	
E(H)		0,553	
Наблюдения X		4.400,000	
Значимость		5,848	
		Фунт	Иена/фунт
Выход регрессии:			
Константа		-0,175	-0,139
Стандартная ошибка \hat{Y} (расчетная)		0,018	0,027
R в квадрате		0,998	0,995
Число наблюдений		24,000	24,000
Степени свободы		22,000	22,000
Показатель Херста	0,626		0,606
Стандартная ошибка коэффициента	0,006		0,009
Значимость	4,797		3,440
		Марка	
Выход регрессии:			
Константа			-0,170
Стандартная ошибка \hat{Y} (расчетная)			0,012
R в квадрате			0,999
Число наблюдений			24,000
Степени свободы			22,000
Коэффициент(ы) X		0,624	
Стандартная ошибка коэффициента		0,004	
Значимость		4,650	

МАРКА/ДОЛЛАР

Обменный курс марка/доллар, подобно курсу иена/доллар, связан с послевоенным развитием – на этот раз Германии, по мере того как США помогали своему старому противнику оправиться от гнета нацизма. Интересно отметить, что R/S-анализ обменного курса марка/доллар фактически идентичен анализу курса иена/доллар. $H = 0,62$, что немного ниже значения для иены/доллара, но не значительно ниже. Это дает нам значимость более четырех стандартных отклонений (см. рисунок 12.2). И снова нет никакого разрыва в графике в логарифмическом масштабе по обеим осям, что подразумевает отсутствие какого-либо цикла или наличие чрезвычайно длинного цикла. Последнее всегда возможно, но кажется маловероятным.

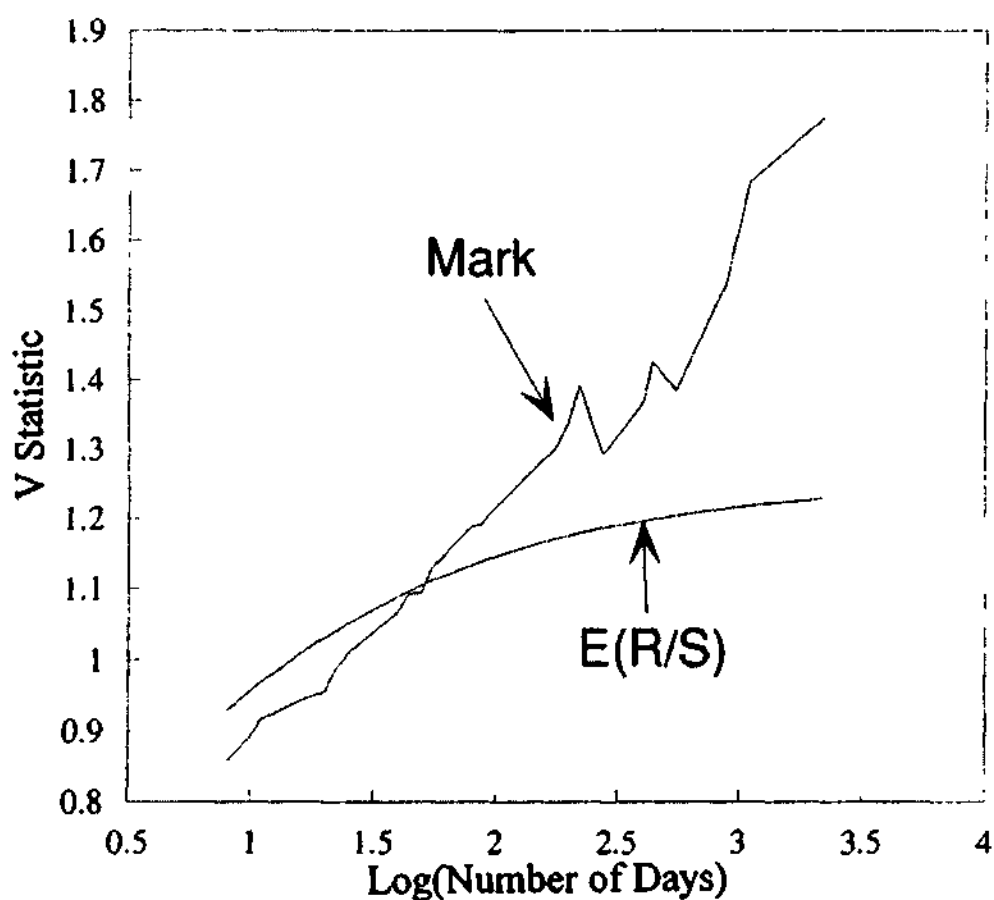


РИСУНОК 12.2 V-статистика, марка, дневные данные, январь 1972 г. – декабрь 1990 г.

ФУНТ/ДОЛЛАР

Обменный курс фунт/доллар настолько похож на другие два (см. рисунок 12.3), что здесь практически нечего комментировать, за исключением того, что в отличие от акций, изучаемых в моей предыдущей книге, все три курса обмена валюты имеют значения H , которые являются фактически идентичными. Это может оказаться очень полезным при исследовании показателя Херста для портфелей.

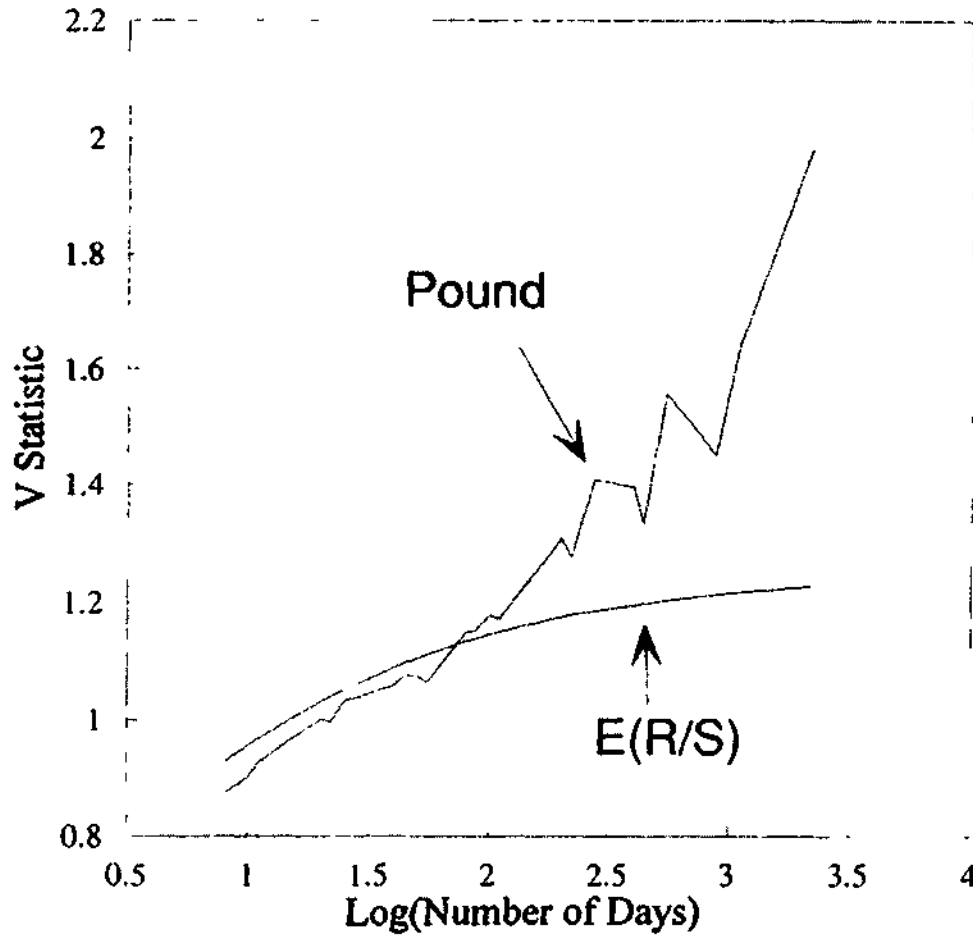


РИСУНОК 12.3 V-статистика, фунт, дневные данные, январь 1972 г. – декабрь 1990 г.

ИЕНА/ФУНТ

Курс иена/фунт немного отличается от других обменных курсов. Япония и Великобритания не являются главными торговыми партнерами: торговля валютой, происходящая между ними, намного менее активна. Кроме того, форвардный рынок, где происходит большая часть хеджирования валюты, котируется в обменных курсах доллара США. Таким образом, обменный курс иена/фунт не котируется непосредственно, а выводится из отношения обменного курса иена/доллар и обменного курса фунт/доллар. В результате обменный курс иена/фунт выглядит чрезвычайно случайным в периоды короче 100 дней. Другие обменные курсы имеют схожие характеристики, но обменный курс иена/фунт фактически идентичен случайному блужданию на более высоких частотах. Рисунок 12.4 показывает, как близко V-статистика следует за своим ожидаемым значением в течение периода менее 100 дней.

Даже при том, что обменный курс иена/фунт не привлекает большого внимания, он также не имеет очевидной длины цикла. Долговременная память либо чрезвычайно длинна, либо бесконечна.

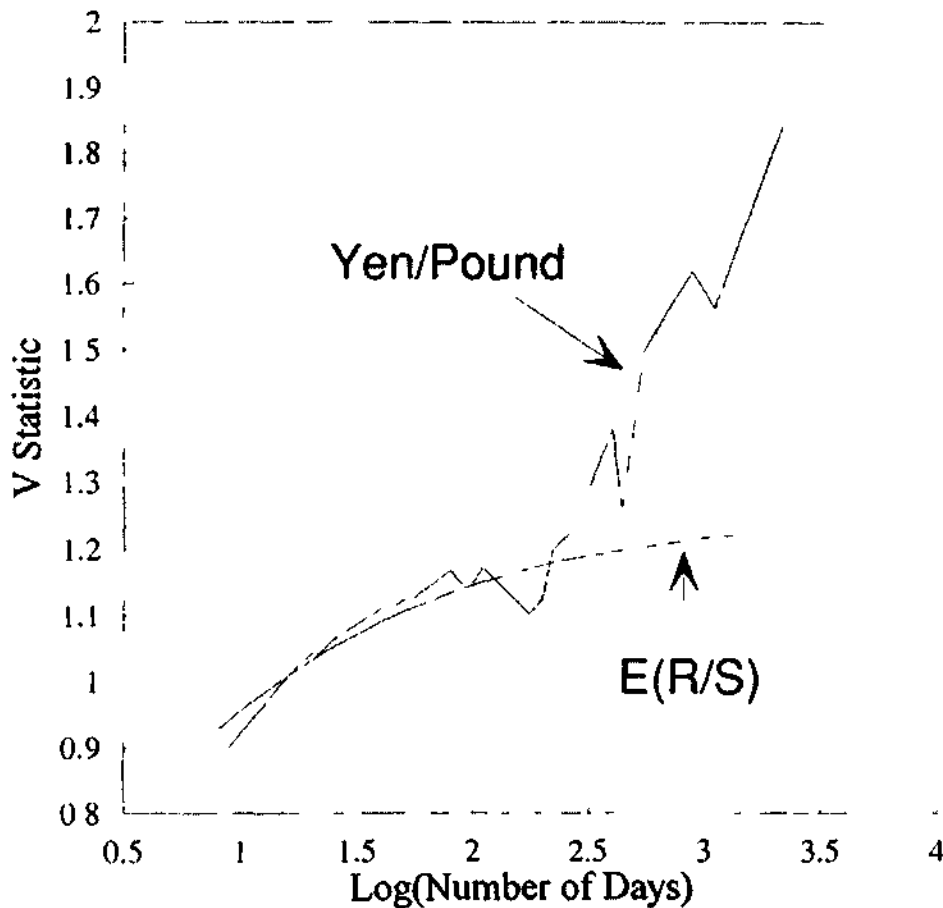


РИСУНОК 12.4 V-статистика, иена/фунт, дневные данные, январь 1972 г. — декабрь 1990 г.

ВЫВОДЫ

Валюта имеет интересные статистические и фундаментальные характеристики, которые отличают ее от других процессов. По существу, валюта не является ценной бумагой, хотя в отношении нее осуществляется активная торговля. Крупнейшие участники, центральные банки не представляют собой максимизаторов доходности; их цели не обязательно соответствуют целям рациональных инвесторов. В то же время на рынках валюты мало признаков циклов, хотя они действительно имеют сильные тренды.

На основании этих характеристик, взятых вместе, мы полагаем, что валюта — истинный процесс Херста. То есть она характеризуется процессами бесконечной памяти. Долгосрочные инвесторы должны опасаться относиться к валюте так, как они относятся к другим торговым объектам. В частности, они не должны предполагать, что стратегия с покупкой и длительным владением будет выгодна в долгосрочной перспективе. Риск увеличивается во времени и не уменьшается со временем. Долгосрочному инвестору, который должен иметь валютный риск, следует рассмотреть активную торговлю такими активами. Они не предлагают никакого преимущества в долгосрочной перспективе.

ЧАСТЬ 4

ФРАКТАЛЬНЫЙ ШУМ

13

Дробный шум и R/S-анализ

В предыдущих главах мы видели доказательства того, что рынки, по крайней мере, в краткосрочной перспективе, являются персистентными процессами Херста, а волатильность, статистический побочный продукт, антиперсистентна. Гипотеза фрактального рынка предлагает экономическое объяснение наблюдаемых самоподобных распределений вероятности, но она не предлагает математическую модель для исследования ожидаемого поведения. В этой и следующих главах мы рассмотрим такие модели. Они должны согласовываться с гипотезой фрактального рынка, описанной в Главе 3.

Мы видели, что краткосрочные рыночные прибыли производят самоподобные распределения частот, характеризующиеся высоким пиком в среднем и более толстыми хвостами, чем при нормальном распределении. Это может быть процесс, связанный с ARCH или GARCH. Как отмечено в Главе 4, ARCH образуется коррелированными условными дисперсиями. Прибыли все еще независимы, поэтому некоторая форма EMH еще будет иметь силу. Однако мы также видели в Части 2, что рынки характеризуются показателями Херста более 0,50, что подразумевает долговременную память в прибылях, в отличие от процессов GARCH и ARCH, которые были исследованы в Главе 4. Кроме того, мы нашли, что дисперсия не является персистентным процессом; наоборот, она антиперсистентна. Основываясь на R/S-анализе, ни процесс ARCH, ни его производные не соответствуют персистентности или эффектам долговременной памяти, которые характеризуют рынки. Следовательно, нам нужна альтернативная статистическая модель, которая имеет распределения с толстыми хвостами, проявляет персистентность и имеет нестабильные дисперсии.

Существует класс шумовых процессов, который соответствует этим критериям: $1/f$ или дробные шумы. В отличие от процесса ARCH, который зависит от сложной статистической манипуляции, дробные шумы представляют собой обобщение процессов броуновского движения. Кажется, что они повсюду. Повсеместная природа $1/f$ -шума озадачивала и интриговала ученых в течение некоторого времени. $1/f$ -шум особенно характерен для фазовых переходов, где внутренние масштабы длины или времени прекращают существовать; то есть корреляции становятся бесконечными.

Часть 4. Фрактальный шум

Поскольку процесс Херста, в его чистой форме, также характеризуется бесконечной памятью, кажется разумным приравнять два процесса. Мандельброт и Уоллис (Mandelbrot and Wallis, 1969a-1969c) как раз это и сделали, но научное и математическое сообщество большей частью не знало о R/S -анализе и его отношении к $1/f$ -шуму. Известное исключение – Шрёдер (Schroeder, 1991). Однако $1/f$ -шум широко исследовался и теоретически, и опытным путем. Согласовывая процесс бесконечной памяти Херста и $1/f$ -шум, мы делаем доступным широкий набор инструментов для рыночного анализа. В этой главе мы начнем этот процесс, но это только начало. Я ожидаю, что исследование процессов дробных шумов и рынков будет одной из самых плодотворных областей для создания полезной технологии. Кроме того, существует семейство моделей ARFIMA, обобщенная версия моделей ARIMA, которые обсуждались в Главе 5. Когда мы делаем интервалы дифференцирования дробными, могут быть вызваны многие характеристики процесса долговременной памяти Херста и смешаны с краткосрочными процессами AR или MA. Глава заканчивается исследованием этой интересной и полезной области.

ЦВЕТ ШУМА

Когда большинство людей думает о шуме, они думают о "белом" или случайном шуме. Этот тип шума – шипение, которое слышно на чистых магнитофонных лентах. Поскольку оно не имеет свойственного масштаба, шипение кажется одинаковым, независимо от скорости ленты. Его подынтегральное выражение называют "коричневым" шумом, или броуновским движением. Коричневый шум – это просто текущая сумма белого шума. Он звучит так, как будто там что-то есть, но в действительности в коричневом шуме нет никакой информации.

Эти шумы могут характеризоваться спектральными функциями, которые следуют простым обратным степенным законам. Спектральные функции рассчитываются через преобразование Фурье, выведенное в начале 1800-х гг. Жаном Батистом Фурье и часто называемое *спектральным анализом*. Преобразование Фурье переводит временной ряд в функцию, определенную его частотами. Оно предполагает, что любой временной ряд может быть представлен суммой синусоидальных (или косинусоидальных) волн различных частот и бесконечной продолжительности. Коэффициенты функции Фурье определяют "спектр" тем же самым образом, согласно которому свет имеет спектр, на многих частотах, или приращениях времени. На частотах, которые имеют острые пики, в первоначальном временном ряду есть периодический компонент. Таким образом, спектральный анализ предполагает, что (1) исследуемый временной ряд является периодическим по природе и (2) циклы периодичны по природе.

Однако когда присутствует дробный шум, спектральные функции лишены характерных черт и изменяют масштаб согласно обратным степенным законам. Такие обратные степенные законы являются функцией частоты f и следуют форме f^{-b} . Спектральные функции следуют обратному степенному закону вследствие самоподобного характера изучаемой системы. Частоты изменяют масштаб, как и все фракталы, согласно степенным законам. Коэффициент масштабирования, или

спектральный показатель b , может варьироваться от 0 до 4. Для белого шума $b = 0$; то есть спектральная функция белого шума не связана с частотой. Белый шум остается одинаковым на всех частотах, вот почему шипение на магнитофонной ленте кажется одинаковым на всех скоростях (или частотах). Схожим является и вычисление фрактальной размерности белого шума в фазовом пространстве. Белый шум заполняет размерность вложения (которая, в данном случае, является частотой), в которую он помещен. Нет никакого закона масштабирования. Когда белый шум интегрирован, тогда $b = 2$, спектральные функции для коричневого шума. Таким образом, коричневый шум имеет форму $1/f^2$. Как и в большинстве вероятностных процессов, коэффициент масштабирования является квадратом.

Есть и другие значения для b . Если $0 < b < 2$, мы имеем *розовый* шум. О розовом шуме часто говорят как о $1/f$ -шуме, но это в некоторой степени неправильно. Розовый шум кажется широко распространенным в природе, и он стал использоваться в моделировании турбулентности, особенно когда b принимает дробные значения между 1 и 2. За коричневым шумом есть *черный* шум, где $b > 2$. Черный шум используется для моделирования персистентных систем, которые, как известно, имеют резкие крахи. Таким образом, теперь у нас есть взаимосвязь между дробными шумами и процессом Херста:

$$b = 2 * H + 1 \quad (13.1)$$

где b = спектральный показатель

H = показатель Херста

Черный шум связан с эффектами долговременной памяти ($H > 0,50$, $2,00 < b \leq 4,00$); розовый шум связан с антиперсистентностью ($H < 0,50$, $1 \geq b > 2$). Это соотношение между спектральными функциями и показателем Херста были постулировано Мандельбротом и Ван Нессом (Mandelbrot and Van Ness, 1968), которые также предположили, что производная дробного броуновского движения имеет спектральный показатель $1 - 2 * H$.

Хотя эти отношения, постулированные Мандельбротом и Ван Нессом (Mandelbrot and Van Ness, 1968), были в значительной степени приняты, строго определены они были Фландрином (Flandrin, 1989).

РОЗОВЫЙ ШУМ: $0 < H < 0,50$

Долгое время существовало мнение, что $0 < H < 0,50$ – "менее интересный случай", по словам Мандельброта (Mandelbrot, 1982). Однако это не так. Как видно из уравнения (13.1) и результатов Главы 10, антиперсистентность может быть очень важна. Отношения между волатильностью и турбулентным потоком помогут нашему пониманию рынков. Это также уменьшит число неправильных представлений об отношениях между физическими системами и рынками.

Шмит, Лаваль, Шерцер и Лавджой (Schmitt, Lavallee, Schertzer, and Lovejoy, 1992), а также Кида (Kida, 1991) в своих публикациях указали на связь между фрактальными распределениями (то есть, распределениями Леви) и турбулентным

Часть 4. Фрактальный шум

потоком. Уравнение (13.1) показывает связь между турбулентным потоком и показателем Херста. Антиперсистентные значения H соответствуют розовому шуму. Таким образом, понимание розового шума увеличивает наше понимание структуры антиперсистентности и волатильности.

Процессы релаксации

$1/f$ -шум тесно связан с процессами релаксации. Фактически, $1/f$ -шум был постулирован Мандельбротом (Mandelbrot, 1982) как сумма большого количества параллельных процессов релаксации, происходящих на многих различных частотах. Эти частоты являются логарифмически равноотстоящими, что объясняет поведение обратного степенного закона. Мы видели подобную структуру в функции Вейерштрасса в Главе 6. Функция Вейерштрасса была суммой бесконечного числа синусоид, встречающихся на бесконечном числе частот.

Процесс релаксации – форма динамического равновесия. Представьте два уравновешенных вида, находящихся в пределах закрытой окружающей среды. Появляется внешняя сила, которая благоприятна только для одного вида: количество особей одного вида начнет расти, по мере того как количество особей другого вида будет уменьшаться, пока не будет достигнуто новое равновесие. То время, которое необходимо для достижения нового равновесия, является корреляцией системы или временем *релаксации*.

Гарднер (Gardner, 1978) описал простой метод, предложенный Ричардом Воссом, для моделирования $1/f$ -шума. Подобно вероятностной колоде карт Херста, он предлагает метод понимания того, как параллельные процессы релаксации могут происходить в природе и на рынках.

Метод Восса использует три игральных кости. Бросается первая кость, и для каждого наблюдения записывается число. Вторая кость бросается каждый второй раз, и число на второй кости добавляется к числу на первой кости. Третья кость бросается каждый четвертый раз, и ее значение добавляется к двум другим. Этот метод моделирует $1/f$ -шум на небольшом диапазоне частот. Первая кость имеет частоту один, вторая – частоту два, а третья – частоту четыре. Складывая три броска, через различные равноотстоящие интервалы, мы имитируем многократные времена релаксации через различные интервалы, которые являются равноотстоящими в пространстве \log_2 .

На рынках двумя "видами" могут быть два тренда, один из которых основан на настроении, а другой – на значении. Некоторая информация, например, об уровне долгосрочных процентных ставок, не может принести пользу отдельной компании, если она имеет небольшой долгосрочный долг или вообще не имеет такового. Но если это приносит пользу рынку в целом, улучшенное настроение может подтолкнуть курс акций к новой "справедливой цене". Такая новая справедливая цена является комбинацией перспектив компании (которые связаны с фундаментальной информацией, информацией бухгалтерского баланса) и относительного положения процентных ставок по отношению к фондовой бирже в целом. Время, которое требуется для полной оценки фондовой биржей изменения в процентных ставках,

будет временем релаксации для этого фактора. Различные акции, вероятно, будут оценивать информацию разными темпами. Поэтому рынок в целом будет иметь много различных "параллельных" времен релаксации в качестве реакции на одну и ту же информацию.

Согласно гипотезе фрактального рынка более вероятно, что различные инвесторы с различными инвестиционными горизонтами реагируют на информацию многократными временами релаксации; то есть информация затрагивает различных инвесторов по-разному в зависимости от их инвестиционного горизонта. Поэтому волатильность, которая является мерой неуверенности на рынке, подверглась бы многим параллельным изменениям с различными временами корреляции или релаксации.

Шрёдер (Schroeder, 1991) предложил формулу для моделирования 1/f-шума, и она является более надежной, чем метод трех игральных костей Восса. Она задействует генератор процессов релаксации. Эта формула повторяется для уровней частоты, равноотстоящих в логарифмическом пространстве, и суммируется. Формула проста и может быть легко реализована компьютерами, даже в электронной таблице. Формула такова:

$$x_{n+1} = \rho * x_n + \sqrt{1 - \rho^2} * r_n \quad (13.2)$$

где $x_0 = 0$

r = равномерное случайное число

ρ = желаемое время корреляции

ρ связано со временем релаксации t следующим отношением:

$$\rho = \exp(-1/t) \quad (13.3)$$

где t – время релаксации. Выбираются три значения t , равноотстоящих в логарифмическом пространстве, и генерируются три ряда x . Например, если желаемая последовательность находится в пространстве \log_{10} , используется $t = 1, 10$ и 100 . Будут получены значения $\rho = 0,37, 0,90$ и $0,99$ соответственно. Шрёдер говорит, что три наблюдения, равноотстоящие в логарифмическом пространстве, являются достаточными для хорошей аппроксимации. В этом случае частоты отделены степенями 10. В случае с игральными костями это были степени 2. Тем не менее, важно обратить внимание на то, что это – аппроксимация. Теоретически, 1/f-шум состоит из бесконечного числа таких процессов релаксации, происходя параллельно на всех различных частотах. Чем больше "частот" мы добавляем к моделированию, тем лучше результаты.

Уравнение (13.2) может быть легко смоделировано в электронной таблице, с использованием следующих шагов:

1. Поместите столбец, состоящий из приблизительно 1 000 случайных чисел, в столбце A.
2. В ячейке B1 поместите 0.

Часть 4. Фрактальный шум

3. В ячейку B2 поместите следующее уравнение:
 $0.37*B1 + @sqrt(1 - 0,37 \wedge 2) *A2$
4. Скопируйте ячейку B2 вниз для 1 000 ячеек.
5. Повторите шаги 1 – 4 в столбцах C и D, но в шаге 3 замените 0,37 на 0,90.
6. Повторите шаги 1 – 4 в столбцах E и F, но в шаге 3 замените 0,37 на 0,99.
7. Сложите столбцы A, C и F в столбце G.

В столбце G содержится розовый шумовой ряд. Постройте график этого ряда и сравните его со случайным. Заметьте, что в нем много более крупных изменений, как положительных, так и отрицательных, а также больше частых инверсий.

Уравнение (13.2) выглядит очень простым, но между его частями происходит комплексное взаимодействие. Первый член в правой части – простой процесс AR(1), подобный тем, которые мы исследовали в Главе 4. Следовательно, это уравнение содержит бесконечную память, как и процессы AR(1). Однако мы также видели в Главе 4, что системы AR(1) персистентны для коротких временных интервалов. Как мы увидим, этот ряд является антиперсистентным. Что-то во втором члене должно вызывать антиперсистентность.

Второй член – случайный шок. Его коэффициент обратно пропорционально связан с коэффициентом корреляции в первом члене. Например, когда $\rho = 0,37$, коэффициент при втором члене составляет 0,93; а когда $\rho = 0,90$, коэффициент при втором члене равен 0,43. То есть, чем сильнее процесс AR(1), тем менее сильным является случайный шок. Однако случайный шок входит в процесс AR при следующей итерации и становится частью процесса бесконечной памяти.

Случайный шок удерживает систему от достижения равновесия. Если бы случайный элемент не был включен, каждый ряд x достиг бы равновесия ко времени релаксации t . Однако случайный элемент продолжает возмущать систему; она постоянно меняет направление и никогда не успокаивается. Можно ожидать, что такой тип системы будет иметь неустойчивую дисперсию и среднее. Мы исследуем эту проблему более подробно в Главе 14.

На рисунке 13.1 показан график в логарифмическом масштабе по обеим осям спектральной функции против частоты для ряда из 1 000 наблюдений, созданных согласно уравнению (13.2). Наклон линии – 1,63, что дает $b = 1,63$ или $H = 0,31$ согласно уравнению (13.1). На рисунке 13.2 приведен R/S-анализ того же ряда. R/S-анализ дает $H = 0,30$, подтверждая уравнение (13.1). Значения изменяются, потому что уравнение (13.1) дает асимптотическое значение H . Для небольшого числа наблюдений значения R/S будут смещены и будут следовать за ожидаемыми значениями из уравнения (5.6). Однако оба результата находятся в близком соответствии. Что еще более важно, оба дают антиперсистентные значения H . Они выглядят очень похожими на исследования волатильности в Главе 9.

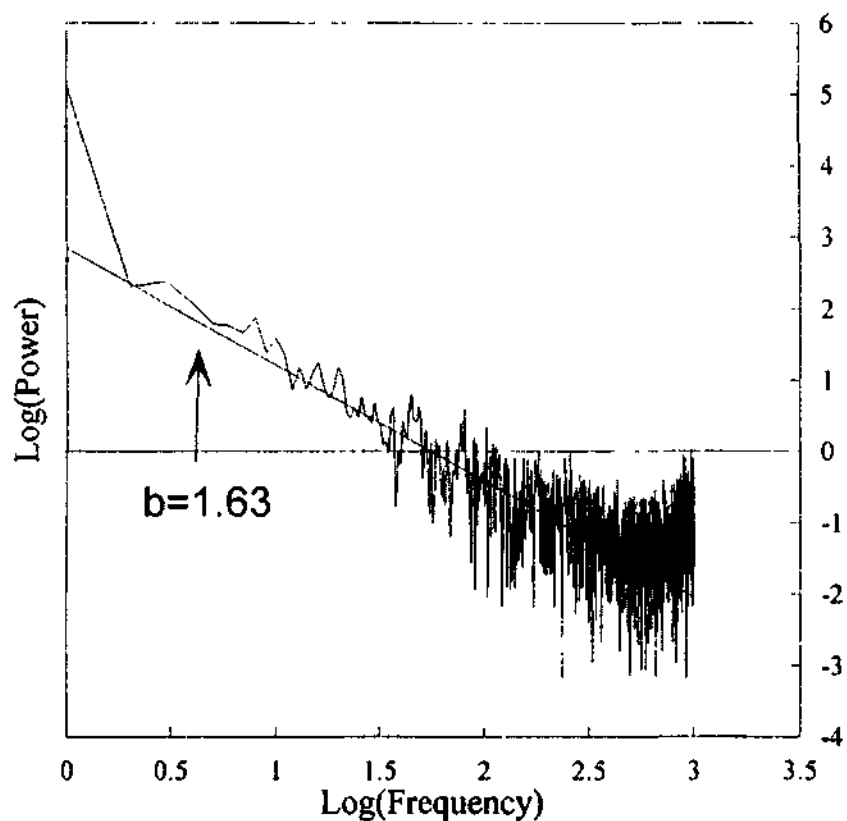


РИСУНОК 13.1 Спектральные функции, $1/f$ -шум: алгоритм многократной релаксации.

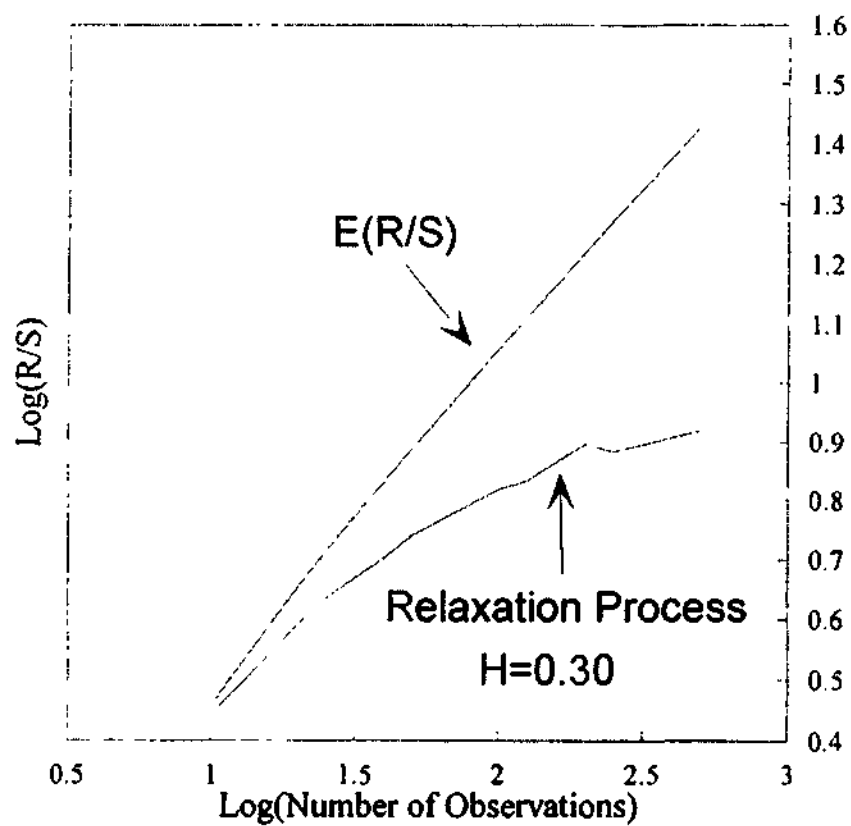


РИСУНОК 13.2 R/S-анализ, антиперсистентность: процесс релаксации.

Часть 4. Фрактальный шум

Вероятно, что многократные параллельные процессы релаксации существуют вследствие рыночной структуры, постулированной в гипотезе фрактального рынка. Каждый инвестиционный горизонт (или частота) имеет свою собственную вероятностную структуру. Эта самоподобная вероятностная структура означает, что в краткосрочной перспективе каждый инвестиционный горизонт сталкивается с одинаковым уровнем риска, после поправки на масштаб. Поэтому каждый инвестиционный горизонт имеет одинаковую неустойчивую структуру волатильности. Сумма этих неустойчивых волатильностей представляет собой $1/f$ -шум с характеристическим показателем $b = 1,56$, или $H = 0,44$. Причина неустойчивости волатильности будет рассмотрена в Главе 14, касающейся фрактальной статистики.

Переमेжаемость

Интересно, что характеристическое значение $b = 1,67$, или $H = 0,33$, часто обнаруживается в природе. Колмогоров (Kolmogorov, 1941) предсказал, что изменение скорости турбулентной жидкости будет иметь $b = 5/3$. Недавние исследования турбулентности в атмосфере Кида (Kida, 1991), а также Шмита и др. (Schmitt et al., 1992) показали, что фактический показатель турбулентности очень близок к предсказанному значению. Персистентные значения H стремятся приблизительно к 0,70; антиперсистентные значения стремятся приблизительно к 0,33. Это предполагает, что между турбулентностью и рыночной волатильностью может быть взаимосвязь. Как ни странно, когда большинство людей приравнивает турбулентность к фондовой бирже, они думают об изменении цен. Однако турбулентный поток мог бы лучше моделировать волатильность, которая также может быть куплена и продана на рынках опционов.

Турбулентность считается *каскадным* явлением. Она характеризуется энергией, передаваемой от крупномасштабных структур к мелкомасштабным структурам. В турбулентности главная сила вводится в жидкость. Эта сила вызывает многочисленные водовороты, при этом меньшие водовороты отделяются от больших водоворотов. Эта самоподобная каскадная структура была одним из первых образов динамического фрактала. Однако кажется маловероятным, что это то явление, которое характеризует волатильность, потому что оно представляет собой следствие обратного степенного закона. Рынки с большей вероятностью представляют собой явления степенного закона, где крупные масштабы являются суммой небольших масштабов (процесс усиления). Этот процесс усиления лежит в основе процесса долговременной памяти. В волатильности может иметь место следующее:

1. Мы видели временную структуру волатильности в Главе 2. На рынках акций, облигаций и валюты волатильность увеличивалась быстрее, чем квадратный корень времени. Это отношение одного инвестиционного горизонта к другому, усиливая эффекты меньших горизонтов, может быть динамической причиной того, что волатильность имеет свойство масштабирования степенного закона. В любой момент времени фрактальная структура рынков (то есть многих инвесторов, которые имеют различные инвестиционные горизонты, торгуя одновременно) представляет собой моментальный снимок

процесса усиления. Она бы сильно походила на снимки турбулентного потока.

2. Рынки акций и облигаций действительно имеют максимальный масштаб, показывая, что эффект памяти рассеивается, как рассеивается энергия в турбулентном потоке. Однако валюты не имеют подобного свойства, и усиление энергии, или память, продолжается всегда. По существу, волатильность, значение b которой схоже с таковым значением турбулентного потока, должна быть смоделирована.

Известное логистическое уравнение представляет собой самый простой метод имитации каскадной модели турбулентности. Логистическое уравнение характеризуется дорогой от упорядоченного поведения к хаотическому через удвоение периода. Это уравнение часто используется в качестве примера того, как случайно (статистически говоря) выглядящие результаты могут быть получены из простого детерминированного уравнения. – Тот факт, что логистическое уравнение производит *антиперсистентные* результаты, не так хорошо известен. Это делает его моделью, неподходящей для рынков капитала, хотя оно может быть хорошей моделью для волатильности.

Логистическое уравнение первоначально было разработано для моделирования динамики популяций (также как и процессы релаксации) и баллистики. Предположим, что мы имеем популяцию, темп роста (или "показатель рождаемости") которой равен r . Если мы просто применим темп роста к популяции, мы не получим очень интересную или реалистичную модель. Популяция будет просто неограниченно, линейно расти во времени. Как нам известно, если популяция растет неограниченно, она, в конечном счете, достигнет размера, при котором она будет превосходить свои ресурсы. По мере того как ресурсы будут становиться более скудными, популяция будет уменьшаться. Поэтому необходимо добавить показатель "смертности". При наличии этого коэффициента по мере роста совокупности показатель смертности увеличивается. Логистическое уравнение содержит этот показатель рождаемости и смертности и принимает следующую основную форму:

$$X_{t+1} = r * X_t * (1 - X_t), \quad 0 < X < 1 \quad (13.4)$$

где t = показатель времени

Логистическое уравнение является *итерированным* уравнением: его выход в следующий раз становится входом. Следовательно, каждый результат связан со всеми предыдущими результатами, создавая некоторый тип процесса бесконечной памяти. Уравнение обладает достаточным комплексным поведением, которое связано с темпом роста r .

Логистическое уравнение широко обсуждалось в литературе. Я посвятил ему главу в моей предыдущей книге, но в первую очередь я хотел провести интуитивную связь между фракталами и хаотическим поведением. Здесь я хотел бы обсудить логистическое уравнение как пример антиперсистентного процесса, который проявляет, при определенных значениях параметров, важное свойство перемежаемости, также как рыночная волатильность и турбулентный поток.

Часть 4. Фрактальный шум

Логистическое уравнение, вероятно, не является *той самой* моделью волатильности, но оно имеет некоторые характеристики, которые мы хотели бы видеть в такой модели.

Процесс может переходить от устойчивого поведения к перемежающемуся, а затем к хаотическому при небольших изменениях в значении r . Вернемся к аналогии с динамикой популяции. При небольших значениях r популяция, в конечном счете, приходит к уровню равновесия; то есть популяция достигает такого размера, при котором спрос и предложение уравновешены. Тем не менее, когда $r = 3,00$, появляются два решения (часто называемые "период 2" или "2 цикла"). Это событие называют *бифуркацией типа вилки*, или удвоением периода. По мере увеличения r появляются четыре решения, затем 16, а затем 32. Наконец, когда r приблизительно равно 3,60, результат кажется случайным. Он стал "хаотичным". (Более полное описание, включая инструкции по моделированию логистического уравнения в обычной электронной таблице, можно найти в работе (Peters, 1991a)).

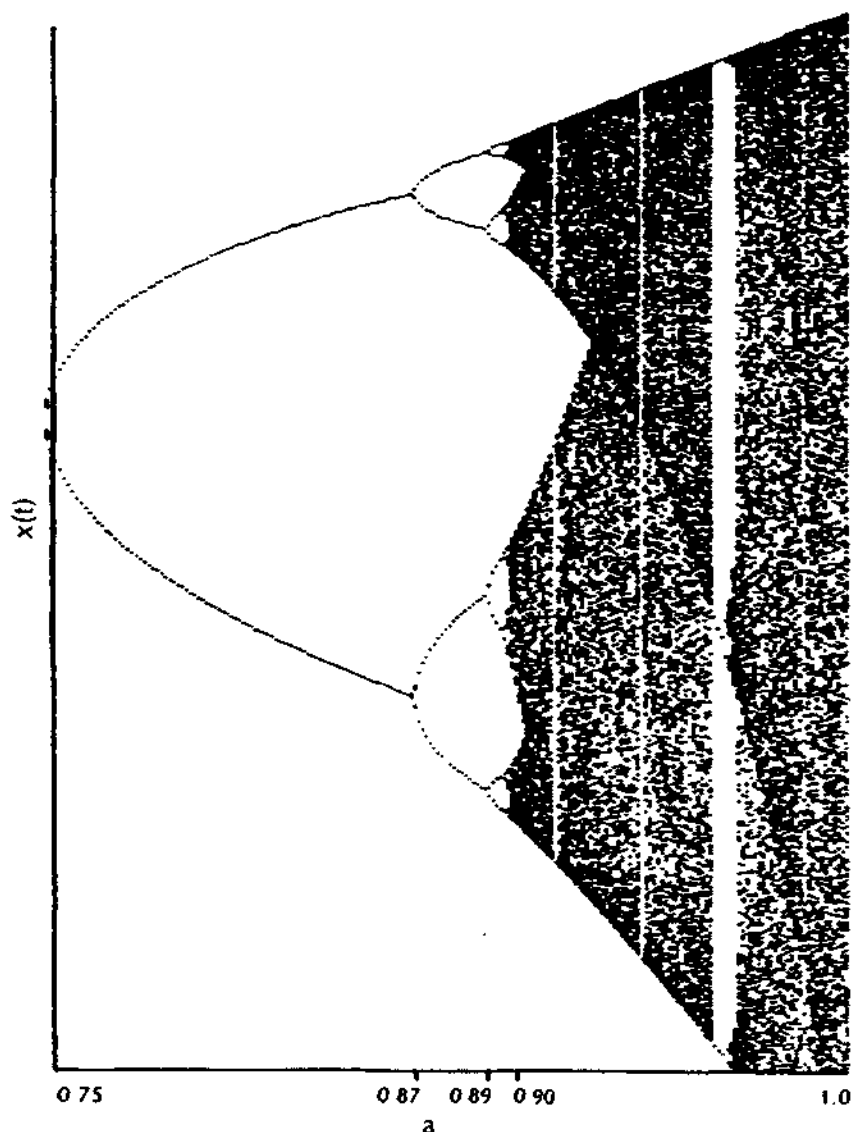


РИСУНОК 13.3а Бифуркационная диаграмма.

На рисунке 13.3(а) представлена бифуркационная диаграмма, которая была

приведена в моей предыдущей книге. На оси x показаны возрастающие значения r , в то время как на оси y показан выход уравнения $x(t)$. При небольших значениях r достигается единственное решение, но увеличение значений приводит к последовательным бифуркациям. Было обнаружено, что такой путь к хаосу с удвоением периода происходит в турбулентном потоке. Удвоения периода связаны с понятием "каскада", которое обсуждалось выше. Однако в хаотической области ($r > 3,60$) также есть окна устойчивости. В частности, когда r приблизительно составляет 3,82, появляется одна большая белая полоса. На рисунке 13.3(b) эта область показана в увеличении.

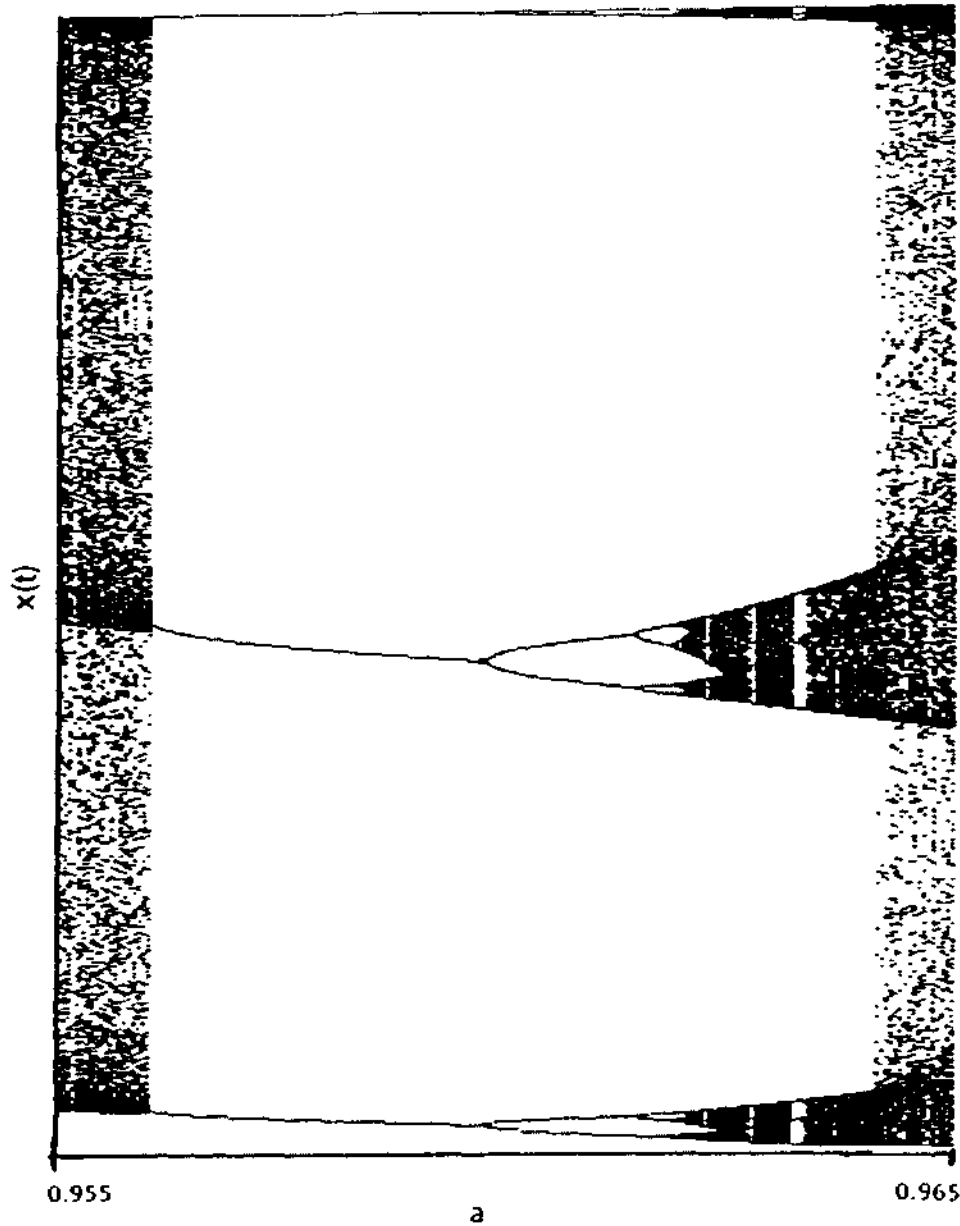


РИСУНОК 13.3b Увеличение хаотической области.

Критическое значение r – это фактически $1 + \sqrt{8}$. В этой точке развивается стабильная область периода 3 (три чередующихся решения). Однако немного ниже этой области результаты чередуются между устойчивой

Часть 4. Фрактальный шум

областью с 3 циклами и хаотической областью. На рисунке 13.4 приведены результаты итерирования уравнения (13.4) в электронной таблице по Шрёдеру (Schroeder, 1991), где $r = 1 + \sqrt{8} - 0,0001$. Чередующиеся области иллюстрируют *перемежающееся* поведение, или чередующиеся периоды устойчивости и неустойчивости. Перемежаемость, или взрывы хаоса, чрезвычайно симптоматичны в отношении поведения реализованной и подразумеваемой рыночной волатильности во времени.

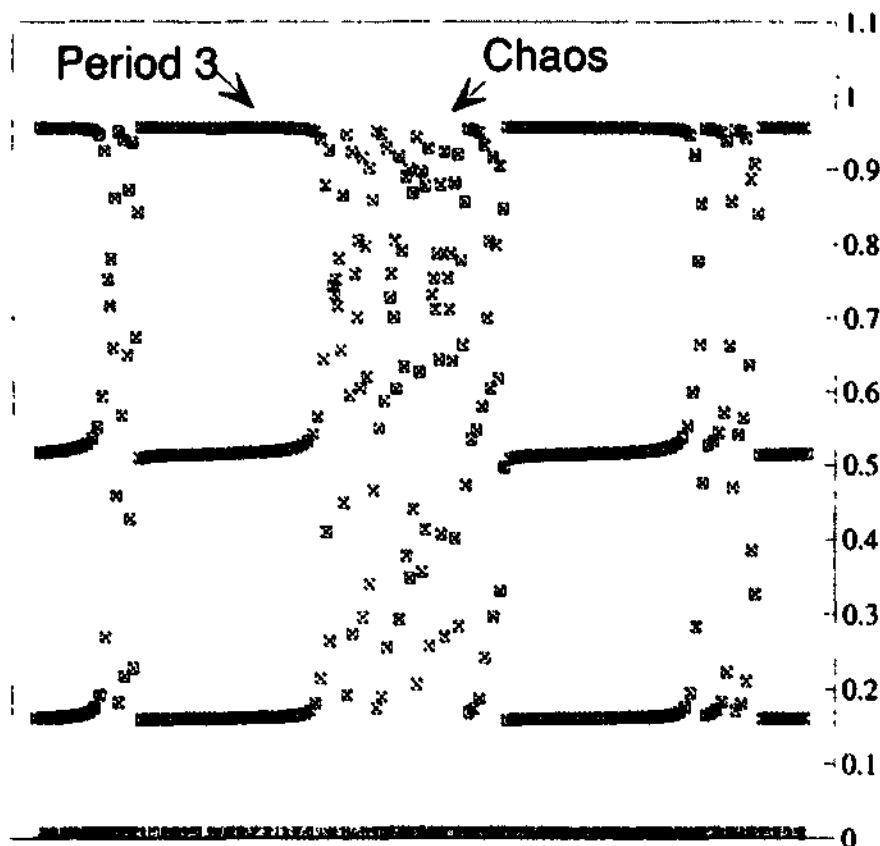


РИСУНОК 13.4 Перемежаемость, логистическое уравнение: $r = 3,8283\dots$

Шрёдер (Schroeder, 1991) более подробно описал геометрические параметры этого события, которое называют *тангенциальной бифуркацией*. По существу, система становится запертой в течение длительного периода времени, колеблясь в пределах тесно связанного набора трех значений. Затем она высвобождается, становясь беспорядочной и хаотической до тех пор, пока она опять не будет заперта. "Устойчивые значения" убывают гиперболически (см. вилку на рисунке 13.3(b)), прежде чем они становятся неустойчивыми. Многие исследования заметили схожее поведение пиков волатильности, сопровождаемых гиперболическим убыванием. Гиперболическое убывание, казалось бы, эквивалентно временам релаксации, которые обсуждались ранее.

Учитывая такое поведение, применение R/S-анализа к логистическому уравнению представляло определенный интерес. Результаты приведены на рисунке 13.5. Мы применили R/S-анализ к 3 000 значениям из логистического уравнения, при этом $r = 4,0$ в хаотической области. Согласно вычислениям H равно 0,37, или 10,2

стандартных отклонений ниже $E(H)$. Эти значения очень похожи на те значения, которые были получены в Главе 10 для рыночной волатильности.

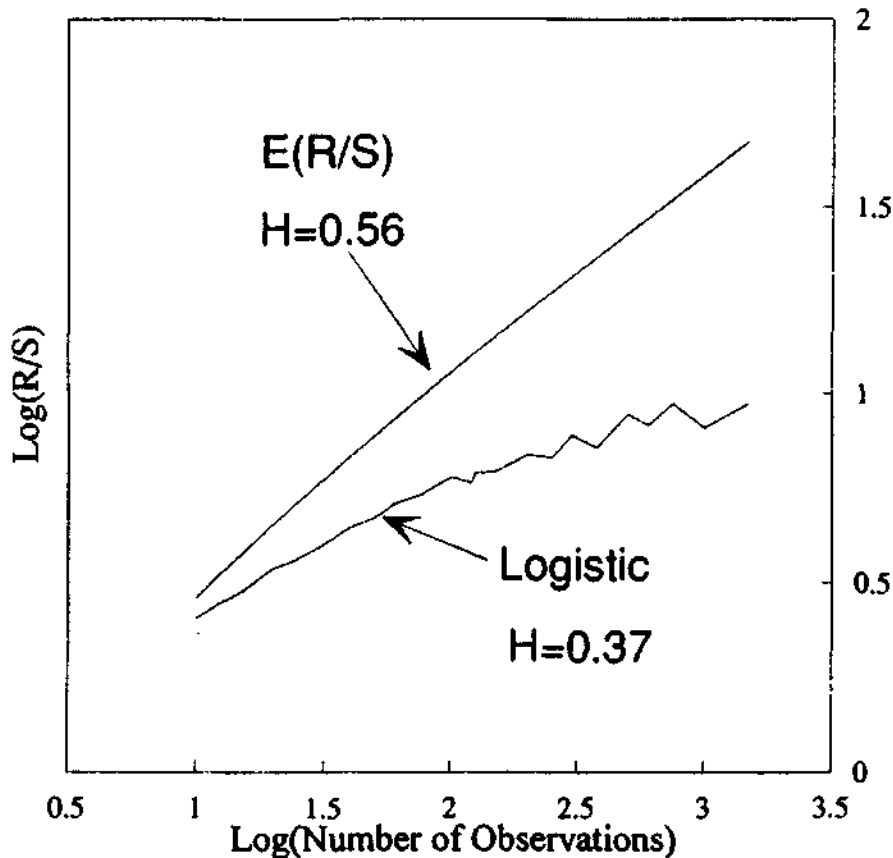


РИСУНОК 13.5 R/S-анализ, логистическое уравнение: $r = 4,0$.

Мы рассмотрели две модели розового шума. Взаимосвязь между процессами релаксации и логистическим уравнением должна быть очевидна. И процессы релаксации, и логистическое уравнение моделируют динамику популяций как итеративный процесс. Однако будучи такими же подобными, как и уравнения (13.2) и (13.4), они также весьма различны. В модели релаксации убывание вызвано временем корреляции и случайным событием. В логистическом уравнении убывание вызвано нелинейным преобразованием самого размера популяции. Логистическое уравнение является намного более богатой моделью с точки зрения динамики. Однако модель релаксации с ее многократными временами релаксации также достаточно привлекательна, особенно в свете фрактальной гипотезы рынка и ее мнения о том, что рынки состоят из наложения бесконечного числа инвестиционных горизонтов.

Существует важная проблема с обеими моделями как "реальными" моделями волатильности. Ни один из процессов не генерирует распределение частот с высоким пиком и толстыми хвостами, которое характерно для систем с $0 < H < 0,50$, как мы увидим в Главе 14. Кроме того, мы все еще не способны объяснить, почему перемежаемость и процессы релаксации должны быть связаны с волатильностью, которая, в конце концов, представляет собой побочный продукт динамики рыночных цен. Существует правдоподобная связь, но прежде чем мы сможем ее обсудить, мы должны рассмотреть процессы черного шума.

ЧЕРНЫЙ ШУМ: $0,50 < H < 1,0$

Процесс Херста, который, по существу, является процессом черного шума, уже широко обсуждался. Подобно розовому шуму, кажется, что в природе существует большое количество процессов черного шума. Розовые шумы происходят в процессах релаксации, таких как турбулентность. Черный шум появляется в длительных циклических данных наблюдений, таких как уровни рек, число солнечных пятен, толщина годовых колец, а также изменения цен на фондовом рынке. Процесс Херста является одним возможным объяснением появления черного шума, но есть и другие причины существования во временном ряду персистентности. В Части 5 мы обсудим возможность "шумового хаоса". В этом разделе мы исследуем дробное броуновское движение.

Эффект Иосифа

Дробное броуновское движение (fractional brownian motion – FBM) представляет собой обобщение броуновского движения, которое долгое время использовалось как процесс диффузии "по умолчанию", как мы неоднократно говорили ранее. По существу, если изучаемый процесс неизвестен, и вовлечено большое число степеней свободы, то броуновское движение является столь же хорошим объяснением, как и любое другое объяснение. Поскольку броуновское движение и его свойства так широко и хорошо изучены, оно также делает доступным большое количество математических инструментов для анализа. Однако, как мы видели, широкая распространенность вероятностных процессов и броуновского движения – это миф. Херст обнаружил, что большинство процессов персистентно и обладает эффектами долговременной памяти. Это нарушает предположение, которое делает процесс случайным, понижая, таким образом, надежность большинства таких инструментов. Частью проблемы является ограничительное предположение, необходимое для броуновского движения – и гауссовой статистики, которая лежит в его основе. Это становится частным случаем, а не общим случаем. Возможно, самая широко распространенная ошибка в анализе временного ряда – предположение о том, что большинство рядов должно быть принято как броуновское движение, пока не доказано обратное. Обратное должно иметь место.

Броуновское движение первоначально изучалось как беспорядочное движение маленькой частицы, взвешенной в жидкости. Роберт Броун (Brown, 1828) понял, что это беспорядочное движение было свойством самой жидкости. Теперь мы знаем, что беспорядочное движение происходит из-за столкновения молекул воды с частицей. Башелье (Bachelier, 1900) выявил взаимосвязь между случайным блужданием и гауссовой статистикой.

Эйнштейн (Einstein, 1908) увидел взаимосвязь между броуновским движением и случайным блужданием. В 1923 г. Винер (Wiener, 1976) смоделировал броуновское движение как случайное блуждание, с лежащей в основе гауссовой статистической структурой. Федер (Feder, 1988) объяснил этот процесс следующим образом.

Возьмем $X(t)$ как положение случайной частицы во времени t . Пусть $\{e\}$ будет гауссовым вероятностным процессом с нулевым средним и единичной дисперсией,

состоящим из случайного числа, помеченного как ϵ . Изменение положения случайной частицы со времени t_0 ко времени t задается следующим:

$$X(t) - X(t_0) \approx \epsilon |t - t_0|^H, \quad \text{for } t \geq t_0 \quad (13.5)$$

где $H = 0,50$ для броуновского движения

Как сказал Федер (Feder, 1988): "Положение $X(t)$ находится, если дано положение $X(t_0)$, посредством выбора случайного числа ϵ из гауссова распределения, умножая его на приращение времени $|t - t_0|^H$ и прибавляя результат к данному положению $X(t_0)$ ".

Для дробного броуновского движения мы обобщаем H таким образом, чтобы оно могло варьироваться от 0 до 1. Если теперь мы задаем $V_H(t)$ как положение частицы в FBM, дисперсия изменений положения изменяет масштаб во времени следующим образом:

$$V(t - t_0) \approx |t - t_0|^{2*H} \quad (13.6)$$

Для $H = 0,50$ это сводится к классическому гауссову случаю. Дисперсия увеличивается линейно со временем, или стандартное отклонение увеличивается как квадратный корень из времени. Однако FBM имеет дисперсии, которые изменяют масштаб быстрее броуновского движения, когда $0,5 < H < 1$. Согласно (13.3) стандартное отклонение должно увеличиваться со скоростью, равной H . Таким образом, персистентный процесс черного шума будет иметь дисперсии, которые ведут себя очень подобно масштабированию рынков капитала, которое мы исследовали в Главе 2. Однако те процессы действительно увеличивались медленнее H . Индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний изменял масштаб как 0,53 корня из времени, в то время как $H = 0,58$. Аналогично, стандартное отклонение обменного курса иена/доллар изменяло масштаб как 0,59 корня из времени, в то время как $H = 0,62$. Идея, стоящая за уравнением (13.6), правильна, но она нуждается в дальнейшем усовершенствовании. Мы оставляем это для будущего исследования. Тем временем, мы можем сказать, что между масштабированием дисперсии и H существует взаимосвязь. Точный характер этой взаимосвязи остается неясным.

Кроме того, корреляция между приращениями $C(t)$ определяется следующим образом:

$$C(t) = 2^{(2*H-1)} - 1 \quad (13.7)$$

Это уравнение выражает корреляцию изменений в положении процесса за время t со всеми приращениями времени t , которые предшествуют ему и следуют за ним. Таким образом, в рыночных терминах это была бы корреляция всех однодневных прибылей со всеми будущими и прошлыми однодневными прибылями. Это также относилось бы к корреляции всех пятидневных прибылей со всеми прошлыми и будущими пятидневными прибылями. Фактически, с теоретической точки зрения, это относилось бы ко всем приращениям времени. Это является мерой силы эффекта долговременной памяти, которая охватывает все масштабы времени.

Когда процесс находится в броуновском движении с $H = 0,50$, $C(t)$ равно нулю. Эффекта долговременной памяти нет. Когда $0 < H < 0,50$, $C(t)$ отрицательно. В данном

Часть 4. Фрактальный шум

случае имеет место эффект инверсии, который происходит в многократных масштабах времени. Мы видели аналогичный эффект для антиперсистентного процесса розового шума. Тем не менее, когда процесс представляет собой черный шум с $0,5 < H < 1,0$, мы имеем бесконечные длительные корреляции; то есть мы имеем эффект долговременной памяти, который происходит в многократных масштабах времени, или на инвестиционных горизонтах рынков капитала. Мы знаем, что уравнение (13.5) не совсем верно, так что мы можем ожидать, что уравнение (13.6) также нуждается в поправке. Эта проблема также оставляется для будущего исследования.

Таким образом, уравнение, определяющее FBM, использует этот эффект бесконечной памяти:

$$B_H(t) = [1/\Gamma(H + 0,50)] * \left[\int_{-\infty}^0 (|t - t'|^{H-0,50} - |t'|^{H-0,50}) dB(t') \right. \\ \left. + \int_0^t |t - t'|^{H-0,50} dB(t') \right] \quad (13.8)$$

Как и прежде, когда $H = 0,50$, уравнение (13.8) сводится к обычному броуновскому движению. Если мы более внимательно исследуем (13.8), мы увидим, что в отношении FBM появляется целый ряд интересных свойств. Первое свойство заключается в том, что FBM – нестационарный процесс, который часто наблюдался в отношении рынков капитала. Однако изменения в FBM не только стационарны, но и самоподобны. Уравнение (13.8) может быть упрощено, для целей моделирования, в форму, которую легче понять:

$$B_H(t) - B_H(t-1) = [n^{-H}/\Gamma(H + 0,50)] * \left[\sum_{i=1}^{n*t} i^{H-0,50} * r_{(1+n*(M+t)-i)} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n*(M-1)} ((n+1)^{H-0,50} - i^{H-0,50}) * r_{(1+n*(M-1+t)-i)} \right] \quad (13.9)$$

где r = ряд гауссовых случайных переменных M

Уравнение (13.9) представляет собой дискретную форму уравнения (13.8). По существу, оно говорит о том же, заменяя интегралы суммированиями. Это уравнение – скользящее среднее в конечном диапазоне случайных гауссовых значений M , взвешенных степенным законом, зависящим от H . Числовые значения на рисунке 6.6 были сгенерированы с использованием этого алгоритма. (Программа на языке BASIC для использования этого алгоритма была приведена в моей более ранней книге).

Временной ряд (или "след времени") ряда черного шума в его канонической форме становится более гладким по мере увеличения H или b . В моделировании гладкость – результат процесса усреднения. Теоретически, это вызвано увеличенными корреляциями среди наблюдений. Эффект долговременной памяти вызывает появление трендов и циклов. Мандельброт (Mandelbrot, 1972) назвал это *эффектом Иосифа*. Источник термина – библейская история о семи годах изобилия, за которыми

следовали семь лет голода. Эффект Иосифа представлен суммированием степенного закона в уравнении (13.9).

Эффект Ноя

Как показано на рисунке 6.6, уравнение (13.9) производит следы времени с соответствующим значением H или необходимым количеством зазубренности; то есть оно дублирует фрактальную размерность следа времени и эффект Иосифа или долговременной памяти. Черный шум имеет дополнительную характеристику: катастрофы. Уравнения (13.8) и (13.9) не вызывают катастрофы, потому что они являются дробными *гауссовыми* шумами. Они объясняют только один аспект черного шума: долговременную память.

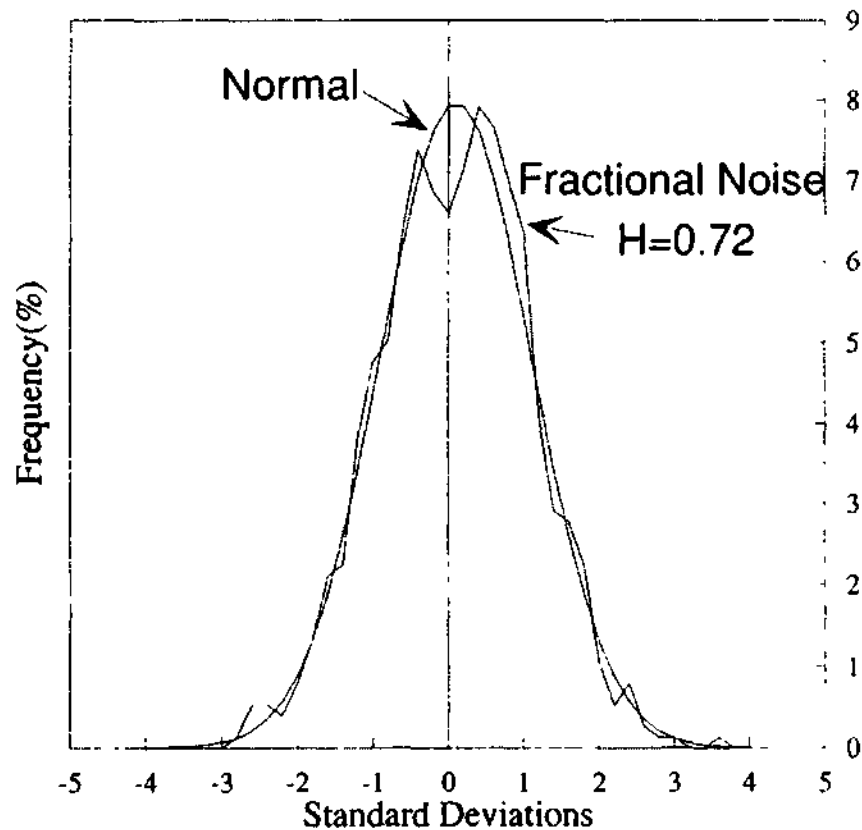


РИСУНОК 13.6 Частотное распределение, дробный шум: $H = 0,72$.

Черный шум также характеризуется разрывами в проекции прямой времени: на ней существуют резкие прерывистые движения вверх и вниз. Эти прерывистые катастрофы приводят к появлению высоких пиков в среднем и толстых хвостов в частотном распределении процессов черного шума. Мандельброт (Mandelbrot, 1972) назвал это свойство *эффектом Ноя*, памятуя о библейской истории о потопе. На рисунке 13.6 показано частотное распределение изменений для FBM, использованное для создания рисунков 6.6(a) и (b). Этот ряд имеет $H = 0,72$, согласно R/S-анализу, и его частотное распределение подобно нормальному гауссову шуму. Мы можем видеть (1), что алгоритмы имитации FBM не обязательно охватывают все ожидаемые характеристики, и (2) один большой недостаток R/S-анализа: *R/S-анализ не может различить дробные гауссовы шумы и дробные негауссовы шумы*. Поэтому

Часть 4. Фрактальный шум

недостаточно одного R/S-анализа, чтобы сделать вывод о том, что система представляет собой черный шум. Нам также нужно частотное распределение с высоким пиком и толстыми хвостами. Даже в этом случае есть третья возможность шумового хаоса, который мы исследуем более подробно в Части 5.

Эффект Ноя, важный аспект черного шума, часто не замечается, потому что он добавляет еще один уровень сложности к анализу. Это происходит, потому что более крупные события *усиливаются* в системе; то есть происходит что-то, что вызывает итерированный контур обратной связи, очень подобно логистическому уравнению. Однако в логистическом уравнении катастрофы происходили часто, также как и в процессах розового шума. В черном шуме они случаются менее часто; система остается персистентной, вместо того чтобы стать антиперсистентной.

Статистически, кажется, что мы не способны воспроизвести эффект Ноя путем моделирования. Однако мы можем воспроизвести его, как мы увидим в нелинейной динамике.

ЗЕРКАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

Розовые шумы и черные шумы обычно имеют место в природе, но есть ли между ними взаимосвязь? Обязательно ли обнаружение одного приведет к другому? В спектре $1/f$ -шумов это вполне могло бы иметь место.

Мандельброт и Ван Несс (Mandelbrot and Van Ness, 1968), так же как и Шрёдер (Schroeder, 1991), показали, что коричневый шум – подынтегральное выражение белого шума; то есть коричневый шум представляет собой просто текущую сумму белого шума. Из этого также следует, что производная или скорость коричневого шума является белым шумом. Следовательно, в $1/f$ -спектре ряд белого шума может быть легко переведен в коричневый шум через некоторый тип "зеркального" эффекта.

В уравнении (13.1) спектральный показатель b был эквивалентен $2 \cdot H + 1$. Мы также упоминали, что для производной FBM спектральный показатель составляет $2 \cdot H - 1$. Таким образом, персистентный ряд с $0,50 < H < 1,00$ будет иметь спектральный показатель больше 2,0, сигнализируя о процессе черного шума. Однако производная процесса черного шума будет иметь $b < 1,0$, делая его процессом розового шума.

Поэтому не удивительно, что волатильность курсов ценных бумаг на фондовом рынке является антиперсистентной. Рыночные прибыли представляют собой процесс черного шума, поэтому их ускорение или волатильность должны быть, как мы обнаружили, процессом розового шума. Мы также подтвердили, что неправильно говорить о том, что рыночные прибыли подобны "турбулентности", которая является известным процессом розового шума. Употреблять этот неправильный термин – все равно, что говорить о том, что движущаяся вода является турбулентной. Турбулентность, которую мы измеряем, является не самой жидкостью, а скоростью жидкости. Аналогично, турбулентность рынка заключается в скорости изменений цен, а не в самих изменениях.

В качестве дальнейшего испытания взаимосвязи розового и черного шума мы

можем исследовать второе различие – изменения изменений – посредством R/S-анализа. Согласно этой взаимосвязи, если первое различие – черный шум, то второе различие должно быть розовым шумом. На рисунке 13.7 приведен график R/S в логарифмическом масштабе по обеим осям пятидневных прибылей по индексу Доу-Джонса для акций промышленных компаний, который использовался в Главе 8. Обратите внимание, что $H = 0,28$, что совместимо с антиперсистентным процессом розового шума. Я нашел, что это будет верным для любого процесса с $H > 0,50$.

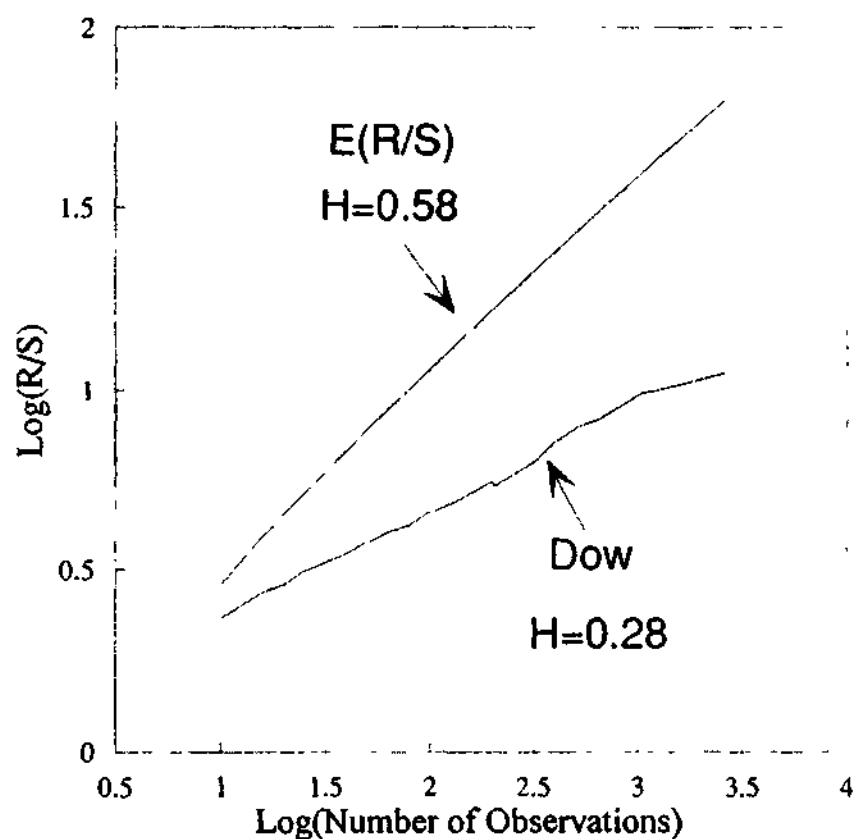


РИСУНОК 13.7 R/S-анализ, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли: второе различие.

ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ: МОДЕЛИ ARFIMA

Помимо более экзотических моделей долговременной памяти, которые мы обсуждали, существует также и обобщенная версия моделей ARIMA (авторегрессионных интегрированных моделей скользящего среднего), которые мы обсуждали в Главе 5. ARIMA-модели – гомогенные нестационарные системы, которые могут быть сделаны стационарными посредством последовательного дифференцирования наблюдений. Более общая модель ARIMA (p,d,q) могла бы также включать авторегрессионные компоненты и компоненты скользящего среднего, в смешанном виде или по отдельности. Параметр дифференцирования d всегда был значением целого числа. Хоскинг (Hosking, 1981) далее обобщил первоначальное значение ARIMA (p,d,q) для дробного дифференцирования, чтобы выработать авторегрессионный дробно интегрированный процесс скользящего среднего (ARFIMA); то есть d может быть любым реальным значением, включая дробные

Часть 4. Фрактальный шум

величины. Модели ARFIMA могут генерировать персистентное и антиперсистентное поведение наподобие дробного шума. Фактически, процесс ARFIMA (0,d,0) является дробным броуновским движением Мандельброта и Уоллиса (Mandelbrot and Wallis, 1969a-1969d). Поскольку более общий процесс ARFIMA (p,d,q) может включать процессы кратковременной памяти AR или MA поверх процесса долговременной памяти, он обладает потенциальными возможностями для описания рынков. В свете гипотезы фрактального рынка он имеет особую привлекательность, потому что сами высокочастотные члены могут быть авторегрессионными (как мы нашли в Главе 9) при наложении поверх процесса Херста с долговременной памятью. Таким образом, модели ARFIMA предлагают нам адаптацию более традиционного метода моделирования, который может быть полностью интегрирован с гипотезой фрактального рынка. Большая часть последующего исследования является пересказом работы Хоскинга (Hosking, 1981). Читатели, заинтересованные в более подробной информации, могут обратиться к этой работе.

Дробное дифференцирование звучит странно. По существу, это попытка преобразовать непрерывный процесс, дробное броуновское движение, в дискретный процесс посредством разбиения процесса дифференцирования на более мелкие компоненты. Целочисленное дифференцирование, которое является лишь грубым приближением, часто ведет к неправильным выводам, когда такая упрощенная модель налагается на реальный процесс.

Кроме того, существует прямая связь между показателем Херста и дробным оператором дифференцирования d :

$$d = H - 0,50 \quad (13.10)$$

Таким образом, $0 < d < 0,50$ соответствует персистентному процессу черного шума, а $-0,50 < d < 0$ эквивалентно антиперсистентной системе розового шума. Белый шум соответствует $d = 0$, а коричневый шум соответствует $d = 1$ или процессу ARIMA(0,1,0), также встречающемуся в литературе. Коричневый шум – след случайного блуждания, а не приращений случайного блуждания, которые являются белым шумом.

Авторегрессионные процессы принято выражать в терминах оператора сдвига назад B . Для белого шума дискретного времени $B(x_t) = x_{t-1}$, так что

$$\Delta x_t = (1 - B) * x_t = a_t$$

где a_t – IID случайные переменные. Фрактально дифференцированный белый шум с параметром d определяется следующим биномиальным рядом:

$$\begin{aligned} \Delta^d &= (1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k \\ &= 1 - d * B - \frac{1}{2} * d * (1 - d) * B^2 - \frac{1}{6} * d(1 - d) * (2 - d) * B^3 - \dots \end{aligned} \quad (13.11)$$

Характеристики ARFIMA (0,d,0)

Хоскинг выработал характеристики ARFIMA-эквивалента дробных шумовых

процессов, ARFIMA (0,d,0) – процесса ARFIMA без эффектов кратковременной памяти из p и q . Я приведу здесь его важные характеристики.

Пусть $\{x_t\}$ будет процессом ARFIMA (0,d,0), где k – временной лаг, а a_t – процесс белого шума со средним нулем и дисперсией σ_a^2 . Вот эти характеристики:

1. Когда $d < 0,50$, $\{x_t\}$ является стационарным процессом и имеет бесконечное представление скользящего среднего:

$$x_t = \psi(B)a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k * a_{t-k} \quad (13.12)$$

где:

$$\psi_k = \frac{d(1+d)\dots(k-1+d)}{k!} = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} \quad (13.13)$$

По мере того как $k \rightarrow \infty$, $\psi_k \sim \frac{k^{d-1}}{(d-1)!}$

2. Когда $d > -0,50$, $\{x_t\}$ обратимо и имеет бесконечное авторегрессионное представление:

$$\pi(B)x_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k * x_{t-1} \quad (13.14)$$

где:

$$\pi_k = \frac{-d*(1-d)\dots(d-1-d)}{k!} = \frac{(k-d-1)!}{k!*(d-1)!} \quad (13.15)$$

По мере того как $k \rightarrow \infty$, $\pi_k \sim \frac{k^{-d-1}}{(-d-1)!}$

3. Спектральная плотность $\{x_t\}$:

$$s(\omega) = (2 * \sin \frac{\omega}{2})^{-2*d} \quad (13.16)$$

для $0 < \omega \leq \pi$.

4. Ковариационная функция $\{x_t\}$:

$$\gamma_k = E(x_t x_{t-k}) = \frac{(-1)^k (-2d)!}{(k-d)!*(-k-d)!} \quad (13.17)$$

5. Корреляционная функция $\{x_t\}$:

$$\rho_k \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!} * k^{2*d-1} \quad (13.18)$$

по мере приближения k к бесконечности.

Часть 4. Фрактальный шум

6. Обратные корреляции $\{x_t\}$:

$$\rho_{inv,k} \sim \frac{d!}{(-d-1)!} * k^{-1-2*d} \quad (13.19)$$

7. Частные корреляции $\{x_t\}$:

$$\varphi_{kk} = \frac{d}{k-d}, (k = 1, 2, \dots) \quad (13.20)$$

Комментарий к характеристикам

Наиболее важные характеристики гипотезы фрактального рынка имеют дело с убыванием авторегрессионного процесса. Для $-0,5 < d < 0,5$ и φ_k и π_k убывают гиперболически (то есть согласно степенному закону), а не экспоненциально, как они вели бы себя в стандартном процессе AR. Для $d > 0$, корреляционной функции, уравнение (13.18) также характеризуется убыванием согласно степенному закону. Уравнение (13.18) также подразумевает, что $\{x_t\}$ асимптотически самоподобно, или имеет статистическую фрактальную структуру. Для $d > 0$ частные и обратные корреляции также убывают гиперболически, в отличие от стандартного процесса ARIMA (p,0,q). Наконец, для длинных (или низких) частот спектр подразумевает процесс долговременной памяти. Все поведение гиперболического убывания в корреляциях также совместимо с персистентным процессом долговременной памяти для $d > 0$.

Для $-0,5 < d < 0$ процесс ARFIMA (0,d,0) антиперсистентен, как описано в Главе 4. Все корреляции и частичные корреляции отрицательны, кроме $\rho_0 = 1$. Они также убывают согласно степенному закону к нулю. Все это согласуется с ранее рассмотренным антиперсистентным процессом.

ARFIMA (p,d,q)

В процессе обсуждения рассматривался процесс ARFIMA (0,d,0), который, как мы упоминали, эквивалентен процессам дробного шума. Этот подход также можно обобщить до процесса ARFIMA (p,d,q), который включает процессы кратковременной памяти AR и MA. Результатом являются эффекты короткой частоты, наложенные поверх процесса низкой частоты или долговременной памяти.

Хоскинг рассматривал воздействие этих дополнительных процессов на примере. В частности он говорил: "На практике процессы ARIMA (p,d,q), вероятно, будут представлять собой наибольший интерес для небольших значений p и q..." Исследование самых простых примеров, процессов AFRIMA (1,d,0) и ARFIMA (0,d,1), является хорошей иллюстрацией смешанных систем. Эти процессы – эквивалент процессов кратковременной памяти AR(1) и MA(0,1), наложенных на процесс долговременной памяти.

Процесс ARFIMA (1,d,0) определяется следующим образом:

$$(1 - \varphi*B) \Delta^d y_t = a_t \quad (13.21)$$

где a_t является процессом белого шума. Мы должны включить процесс дробного дифференцирования в уравнение (13.12), где $\Delta^d x_t = a_t$, так что мы имеем $x_t = (1 - \varphi \cdot B)^d y_t$. Переменная ARIMA (1,d,0), y_t , является авторегрессией первого порядка с возмущениями ARIMA (0,d,0); то есть это – процесс ARFIMA (1,d,0). y_t будет иметь краткосрочное поведение, которое зависит от коэффициента авторегрессии, φ , точно так же, как и нормальный процесс AR(1). Однако долгосрочное поведение y_t будет подобно x_t . Это покажет персистентность или антиперсистентность, в зависимости от значения d . Для стационарности и обратимости мы принимаем $|d| < 0,50$, а $|\varphi| < 1$.

Наибольшую ценность представляет корреляционная функция процесса, ρ_k^y . Используя $F(a,b;c;z)$ как гипергеометрическую функцию, в то время как $k \rightarrow \infty$:

$$\rho_k^y \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!} * \frac{(1+\varphi)}{(1-\varphi)^2} * \frac{k^{2*d-1}}{F(1,1+d;1-d;\varphi)} \quad (13.22)$$

Хоскинг (1981) привел следующий пример. Пусть $d = 0,2$, а $\varphi = 0,5$. Таким образом, $\rho_1 = 0,711$ для обоих процессов. (См. таблицу 13.1). Сравнивая корреляционные функции для процессов ARFIMA (1,d,0) и AR(1) (как описано в Главе 5) для более длительных задержек, мы можем увидеть различия даже после нескольких периодов. Вспомните, что процесс AR(1) также является процессом бесконечной памяти.

Таблица 13.1 Корреляции ARFIMA (1,d,0), ρ_k ; $d = 0,2$, $\varphi = 0,5$ и AR(1) с $\varphi = 0,711$

k	ARFIMA	AR	k	ARFIMA	AR
1	0,711	0,711	7	0,183	0,092
2	0,507	0,505	8	0,166	0,065
3	0,378	0,359	9	0,152	0,046
4	0,296	0,255	10	0,141	0,033
5	0,243	0,181	15	0,109	0,001
6	0,208	0,129	20	0,091	0,000

На рисунке 13.8 результаты представлены в виде графика. Убывание по корреляции, действительно, весьма различно в долгосрочной перспективе, но идентично в краткосрочной перспективе.

Хоскинг описал процесс ARFIMA (0,d,1) как "скользящее среднее первого порядка частично отличного белого шума". Параметр MA, θ , используется таким образом, что $|\theta| < 1$; снова, $|d| < 0,50$ для стационарности и обратимости. Процесс ARFIMA (0,d,1) определяется как:

$$y_t = (1 - \theta \cdot B)^d x_t \quad (13.23)$$

Корреляционная функция имеет следующий вид, когда $k \rightarrow \infty$:

$$\rho_k^y \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!} * a * k^{2*d-1} \quad (13.24)$$

где:

$$a = \frac{(1-\theta)^2}{(1+\theta^2 - (2*\theta*d/(1-d)))} \quad (13.25)$$

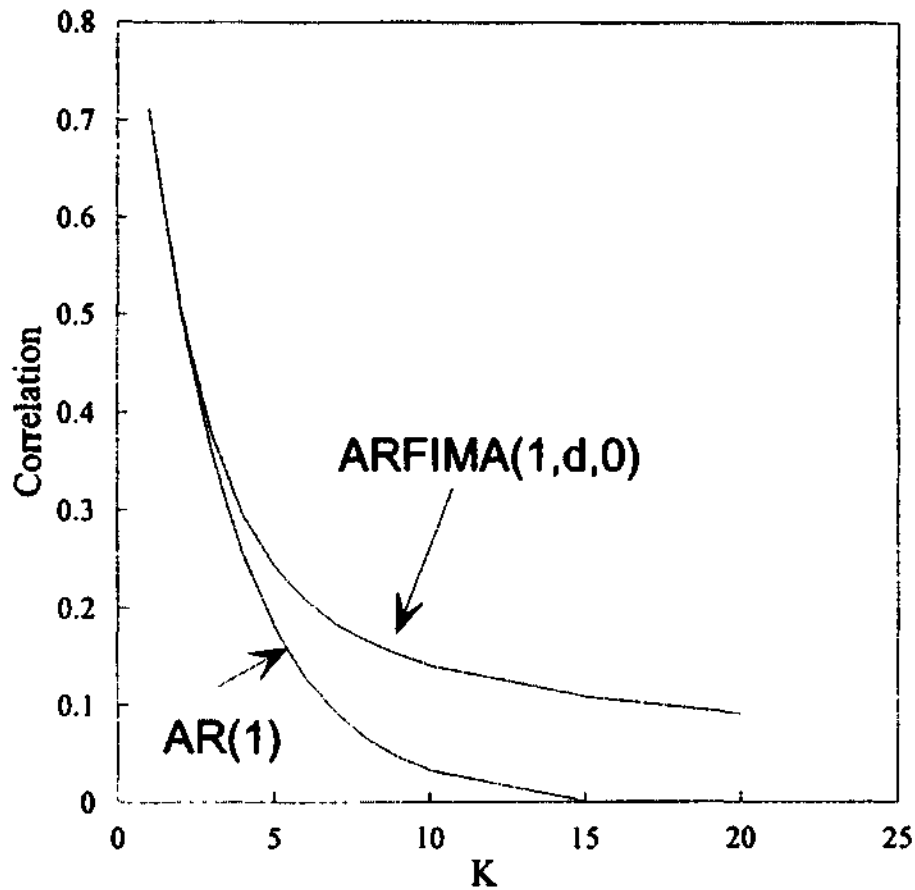


РИСУНОК 13.8 ARFIMA (1,d,0) против AR(1), корреляции за период задержки K.

Для сравнения корреляционной структуры ARFIMA (0,d,1) с ARFIMA (1,d,0) Хоскинг выбрал два ряда с $d = 0,5$ и параметрами задержки, которые давали одинаковое значение ρ_1 . (См. рисунок 13.9). В частности, параметр ARFIMA (1,d,0) $\varphi = 0,366$, а параметр ARFIMA (0,d,1) $\theta = -0,508$, оба дают $\rho_1 = 0,60$. (См. таблицу 13.2).

Таблица 13.2 Сравнение корреляций ARFIMA (1,d,0) и ARFIMA (0,d,1)

k	ARFIMA(1,d,0)	ARFIMA(0,d,1)
1	0,600	0,500
2	0,384	0,267
3	0,273	0,202
4	0,213	0,168
5	0,178	0,146
10	0,111	0,096
20	0,073	0,063
100	0,028	0,024

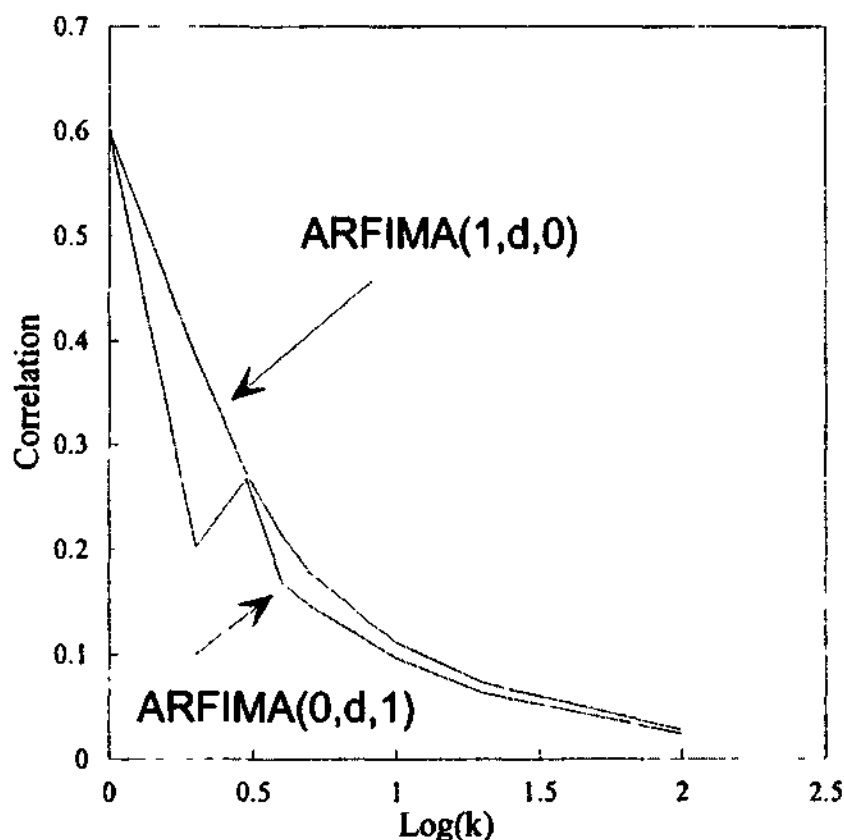


РИСУНОК 13.9 ARFIMA (1,d,0) против ARFIMA (0,d,1), корреляции по $\log(k)$.

Краткосрочная корреляционная структура различна, при этом процесс MA снижается более резко, чем процесс AR. Тем не менее, по мере увеличения задержки корреляции становятся все более и более подобными, и доминирует процесс долговременной памяти. Исследование американской фондовой биржи в Главах 8 и 9 было очень схожими. В Главе 8 использовался индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, а в Главе 9 использовался индекс S&P 500, но в этих широких рыночных индексах достаточно схожего поведения, чтобы прийти к выводу. В Главе 9 мы нашли, что высокочастотные данные о минимальных колебаниях курса являются процессом AR, имея скудные признаки процесса долговременной памяти. Однако в Главе 8 мы нашли обратное. Мало признаков процесса AR (кроме как на ежедневной частоте), но много признаков долговременной памяти. Это подразумевает, что американская фондовая биржа, вероятно, является процессом ARFIMA (p,d,0), хотя необходимо более всесторонне исследование.

Хоскинг привел следующую процедуру для определения и оценки модели ARFIMA (p,d,q):

1. Оцените d в модели ARIMA (0,d,0) $\Delta^d y_t = a_t$.
2. Определите $u_t = \Delta^d y_t$.
3. Используя процедуру моделирования Бокса-Дженкинса, определите и оцените параметры ϕ и θ в модели ARFIMA (p,0,q) $\phi * B * u_t = \theta * B * a_t$.
4. Определите $x_t = (\theta * B)^{-1} * (\phi * B * y_t)$.

Часть 4. Фрактальный шум

5. Оцените d в модели ARFIMA (0,d,0) $\Delta^d x_t = a_t$.

6. Проверьте на конвергенцию параметры d , ϕ и θ ; если они не конвергентны, перейдите к шагу 2.

Хоскинг особо указал на использование R/S-анализа для оценки d в шагах 1 и 5, используя уравнение (13.10).

Модель ARFIMA имеет много желательных характеристик для целей моделирования. Она также попадает в рамки более традиционной статистической структуры, которая может сделать ее приемлемой для широкого круга исследователей. Я полагаю, что большое количество будущих исследований будет посвящено этой сфере.

ВЫВОДЫ

В этой главе мы исследовали некоторые сложные, но важные взаимосвязи. Мы нашли, что шум может быть категоризован по цвету и что цвет шума может быть непосредственно связан с показателем Херста H и процессом Херста. Антиперсистентные временные ряды, такие как рыночная волатильность, являются розовым шумом и родственны турбулентности. Персистентные ряды являются черным шумом, характеризующимся бесконечной памятью и прерывистыми резкими изменениями. Мы также рассмотрели семейство моделей ARFIMA как потенциальный инструмент моделирования. Мы исследовали характеристики этих шумов, но мы еще не рассмотрели их статистику. Поскольку статистика – первичный инструмент финансовой экономики, было бы полезно изучить фрактальную статистику. Мы переходим к ней в следующей главе.

Фрактальная статистика

Мы неоднократно говорили о том, что нормальное распределение не подходит для описания рыночных прибылей. До настоящего времени мы конкретно не говорили, что должно его заменить. Мы сделаем предположение, которое не понравится многим читателям. Во-первых, мы должны повторно исследовать причины широкого признания гауссовой гипотезы (рынки – случайные блуждания, которые хорошо описываются с помощью нормального распределения).

Нормальное распределение имеет ряд желательных характеристик. Его свойства и меры дисперсии всесторонне изучены. Было сформулировано большое количество практических применений согласно предположению о том, что процессы являются случайными, и, таким образом, описываются в пределе нормальным распределением. Многие выборочные группы, действительно, случайны. В течение некоторого времени казалось, что нормальное распределение может описать любую ситуацию, где доминировала сложность.

Уэст (West, 1990) цитировал сэра Фрэнсиса Гальтона, английского математика и эксцентричного человека 19-ого столетия:

"Я едва ли знаю что-либо столь же способное впечатлить воображение, как замечательная форма космического порядка, выраженного "законом частоты ошибок". Этот закон был бы персонафицирован греками и обожествлен, если бы они знали о нем. Он правит спокойно и в полном самоуничижении среди дикайнейшего беспорядка. Чем больше толпа и очевидная анархия, тем более совершенно его правление. Это высший закон Неразумности. Всякий раз, когда берется большая выборка хаотических элементов и располагается в порядке их величины, оказывается, что непредвиденная и самая красивая форма регулярности была скрыта все это время".

Гальтон, очевидно, был последователем Платона и истинно верил в создания Понизы. Для Гальтона и для большинства математиков нормальное распределение - предельное положение порядка на беспорядок. Гальтон изучил многие группы, от полезных (продолжительность жизни) до смешных (частота зевков), и показал, что они являются нормально распределенными. К сожалению, существует много процессов, которые не нормальны. Правление "высшего закона Неразумности" часто отсутствует, даже для тех систем, которые кажутся чрезвычайно сложными.

Причины его неудач кроются в его предположениях. Гаусс показал, что предельное распределение набора независимых, идентично распределенных (ИД) случайных переменных было нормальным распределением. Это известный *Закон больших чисел*, или, более формально, *Центральная предельная теорема*. Именно благодаря формулировке Гаусса мы часто называем такие процессы гауссовыми.

Часть 4. Фрактальный шум

Однако имеют место ситуации, в которых закон больших чисел не действует. В частности существуют случаи, когда усиление происходит при экстремальных значениях. Это явление будет часто приводить к распределению с толстыми хвостами.

Например, Парето (Pareto, 1897), экономист, нашел, что распределение доходов индивидуумов было логарифмически нормально распределено приблизительно для 97 процентов населения. Однако для оставшихся 3 процентов было обнаружено, что оно резко увеличивается. Маловероятно, что кто-то будет жить в пять раз дольше среднего, но тот факт, что кто-то в пять раз состоятельнее среднего, не является необычным. Почему между этими двумя распределениями существует различие? В случае продолжительности жизни каждый индивидуум является действительно независимой выборкой, члены семьи не учитываются. Это не сильно отличается от классической проблемы вероятности – вынимания красных или черных шаров из урны. Однако чем богаче индивидуум, тем больше он может рисковать. Богатые могут увеличивать свое богатство такими способами, которые средний индивидуум со средним доходом использовать не может. Следовательно, чем богаче индивидуум, тем больше возможностей он имеет, чтобы стать еще богаче.

Эта способность увеличения не ограничена богатством. Лотка (Lotka, 1926) нашел, что старшие научные сотрудники были способны улучшить свое положение через аспирантов и увеличивали признание своего имени, чтобы публиковать больше работ. Таким образом, чем больше было опубликовано работ, тем больше работ могло быть опубликовано, как только был достигнут крайний хвост распределения.

Такие распределения с длинными хвостами, особенно в данных, полученных Парето, привели к тому, что Леви (Levy, 1937), французский математик, сформулировал обобщенную функцию плотности, частными случаями которой были нормальные распределения, так же как и распределения Коши. Леви использовал обобщенную версию Центральной предельной теоремы. Эти распределения соответствуют большому классу естественных явлений, но они не привлекали большого внимания вследствие их необычных и на вид трудно разрешимых проблем. Их необычные свойства продолжают делать их непопулярными; однако их другие свойства так близки нашим результатам, полученным на рынках капитала, что мы должны их исследовать. Кроме того, было обнаружено, что устойчивые распределения Леви полезны в описании статистических свойств турбулентного потока и $1/f$ -шума – и к тому же они фрактальны.

ФРАКТАЛЬНЫЕ (УСТОЙ) ИВЫЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Распределения Леви – *устойчивые* распределения. Леви говорил, что функция распределения $F(x)$ устойчива, если для всех $b_1, b_2 > 0$ также существует $b > 0$, так что:

$$F(x/b_1) * F(x/b_2) = F(x/b) \quad (14.1)$$

Эта связь существует для всех функций распределения. $F(x)$ – общая характеристика класса устойчивых распределений, а не свойство любого конкретного распределения.

Характеристические функции F могут быть выражены схожим образом:

$$f(b_1 * t) * f(b_2 * t) = f(b * t) \quad (14.2)$$

Следовательно, $f(b_1 * t)$, $f(b_2 * t)$ и $f(b * t)$ имеют распределение одинаковой формы, несмотря на то, что они являются произведениями друг друга. Этим объясняется их "устойчивость".

Характеристические функции

Фактическое представление устойчивых распределений обычно делается по Мандельброту (Mandelbrot, 1964) с использованием логарифма их характеристических функций:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \ln[f(t)] = \ln[E(e^{i * x * t})] \\ &= i * \delta * t - |c * t|^{\alpha} * (1 - i * \beta * (t/|t|) * \tan(\pi * \alpha / 2)), \alpha \neq 1, \\ &= i * \delta * t - |c * t| * (1 + i * \beta * (2/\pi) * \ln|t|), \alpha = 1 \end{aligned} \quad (14.3)$$

Устойчивые распределения имеют четыре параметра: α , β , c и δ . Каждый имеет свою собственную функцию, хотя только два являются критическими.

Сначала рассмотрим относительно незначительные параметры c и δ . δ – параметр положения. По существу, распределение может иметь средние значения, отличные от 0 (стандартного нормального среднего), что зависит от δ . В большинстве случаев исследуемое распределение нормализовано, и $\delta = 0$; то есть среднее распределения полагается равным 0. Параметр c – масштабный параметр. Он наиболее важен при сравнении реальных распределений. Опять же, в пределах понятия нормализации параметр c походит на выборочное отклонение; он является мерой дисперсии. При нормализации выборочное среднее обычно вычитается (чтобы дать среднее равное 0) и делится на стандартное отклонение, так чтобы единицы были в терминах выборочного стандартного отклонения. Нормализация выполняется, чтобы сравнить эмпирическое распределение со стандартным нормальным распределением со средним равным 0 и стандартным отклонением равным 1. c используется, чтобы задать единицы, которыми распределение расширяется и сжимается около δ . Значение c по умолчанию равно 1. Единственная цель этих двух параметров – задать масштаб распределения относительно среднего и дисперсии. Они не являются действительно характерными для какого-либо из распределений, и поэтому они менее важны. Когда $c = 1$, а $\delta = 0$, распределение, как говорят, принимает приведенный вид.

Параметры α и β определяют форму распределения и чрезвычайно важны. Эти два параметра зависят от порождающего процесса; а c и δ – нет. β – параметр асимметрии. Он принимает такие значения, что $-1 \leq \beta \leq +1$. Когда $\beta = 0$, распределение симметрично около δ . Когда параметр асимметрии меньше 0, распределение имеет отрицательную асимметрию; когда он больше 0, распределение имеет положительную асимметрию.

Параметр α , характеристический показатель, определяет островершинность в δ и толщину хвостов. Характеристический показатель может принимать значения $0 \leq \alpha \leq 2$. Когда $\alpha = 2,0$, распределение является нормальным, при этом дисперсия равна

Часть 4. Фрактальный шум

$2\sigma^2$. Тем не менее, когда $\alpha < 2,0$, второй момент, или дисперсия генеральной совокупности, становится бесконечным или неопределенным. Когда $1 < \alpha < 2,0$, существует первый момент, или математическое ожидание; когда $\alpha \leq 1$, математическое ожидание также становится бесконечным.

Бесконечная дисперсия и среднее

Для большинства индивидуумов, которые обучены стандартной гауссовой статистике, идея бесконечных среднего или дисперсии кажется абсурдной или даже извращенной. Мы всегда можем вычислить дисперсию или среднее выборки. Как оно может быть бесконечным? Еще раз повторим, что мы применяем частный случай, гауссову статистику, ко всем случаям. В семействе устойчивых распределений нормальное распределение – частный случай, который существует, когда $\alpha = 2,0$. В этом случае математическое ожидание и дисперсия действительно существуют. Бесконечная дисперсия означает, что не существует "дисперсии совокупности", к которой стремится распределение в пределе. Когда мы берем выборочную дисперсию, мы делаем это, согласно гауссову предположению, как оценку неизвестной дисперсии совокупности. Шарп (Sharpe, 1963) говорил, что беты (в смысле современной теории портфеля (MPT)) должны рассчитываться на основании ежемесячных данных за пять лет. Шарп выбрал пять лет, потому что этот период дает статистически значимую выборочную дисперсию, необходимую для оценки дисперсии совокупности. Пятилетний период статистически значим, только если лежащее в основе распределение является гауссовым. Если оно не является гауссовым и $\alpha < 2,0$, выборочная дисперсия ничего не говорит о дисперсии совокупности, потому что дисперсии совокупности нет. Выборочные дисперсии, как ожидалось бы, будут неустойчивыми и не будут стремиться ни к какому значению, даже при увеличении объема выборки. Если $\alpha \leq 1,0$, то же самое верно и для среднего, которое также не существует в пределе.

Рисунки 14.1 и 14.2 показывают, как бесконечное среднее и дисперсия влияют на устойчивые распределения, используя последовательное среднее и стандартное отклонение по Фамэ (Fama, 1965b).

На рисунке 14.1 использовано 8 000 выборок из известного распределения Коши, которое имеет бесконечное среднее и дисперсию. Распределение Коши более подробно описывается ниже. Используемый здесь ряд был "нормализован" путем вычитания среднего и деления на выборочное стандартное отклонение. Таким образом, все единицы выражены в стандартных отклонениях. Для сравнения мы используем 8 000 гауссовых случайных переменных, которые были нормализованы аналогичным образом. Важно понять, что два последующих шага всегда будут заканчиваться в среднем 0 и стандартном отклонении 1, потому что они были нормализованы к этим значениям. Конвергенция означает, что временной ряд быстро идет к устойчивому значению.

На рисунке 14.1(a) показано *последовательное среднее*, которое вычисляет среднее, по мере того как по одному добавляются наблюдения. Для системы с конечным средним последовательное среднее будет, в конечном счете, стремиться к

математическому ожиданию при использовании достаточного количества данных. В этом случае оно будет 0. На рисунке 14.1(a) временной ряд гауссовых случайных чисел сходится в пределах 0,02 стандартных отклонений среднего примерно к 500 наблюдениям. Хотя он блуждает вокруг среднего 0, он делает это случайным, *однородным* образом. Напротив, хотя ряд Коши не отходит далеко от 0, он делает это систематическим, прерывистым образом; то есть в последовательном среднем есть дискретные скачки, после которых оно начинает систематически подниматься.

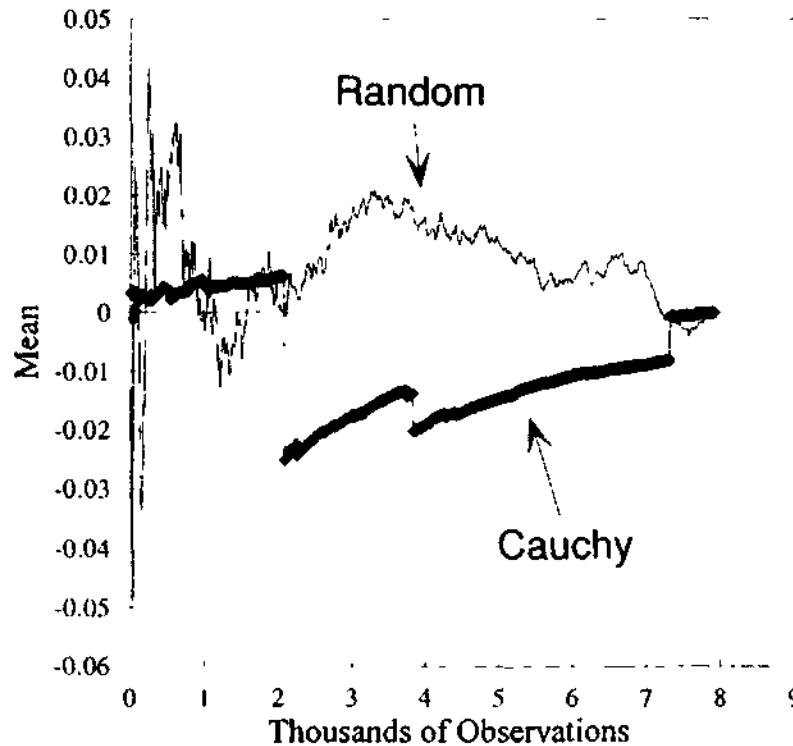


РИСУНОК 14.1a Конвергенция последовательного среднего, функция Коши.

На рисунке 14.2(a) показано *последовательное стандартное отклонение* для тех же двух рядов. Последовательное стандартное отклонение, подобно последовательному среднему, является вычислением стандартного отклонения, по мере того как по одному добавляются наблюдения. В этом случае разница еще более поразительна. Случайный ряд быстро сходится к стандартному отклонению 1. Распределение Коши, напротив, никогда не сходится. Вместо этого оно характеризуется несколькими большими прерывистыми скачками и большими отклонениями от нормализованного значения 1.

На рисунке 14.1(b) приведен график последовательного среднего данных пятнадцатидневного индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний, используемых в Главе 8 и в других разделах данной книги, но оно также было нормализовано к среднему 0 и стандартному отклонению 1. Приблизительно после 1 000 дней график сходится к значению в пределах 0,01 стандартного отклонения 0. Гауссов случайный временной ряд показывает схожее поведение. Среднее прибылей по индексу Доу-Джонса кажется устойчивым, как можно было бы ожидать от устойчивого фрактального распределения. Это поведение однородно и непрерывно. Оно не проявляет дискретных скачков, обнаруженных в функции Коши с ее бесконечным средним.

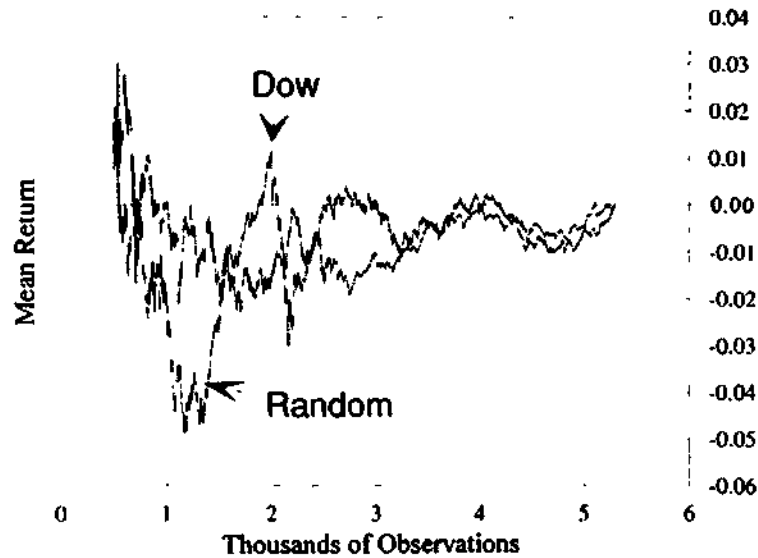


РИСУНОК 14.1b Конвергенция последовательного среднего, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли: 1888 -1990 гг.

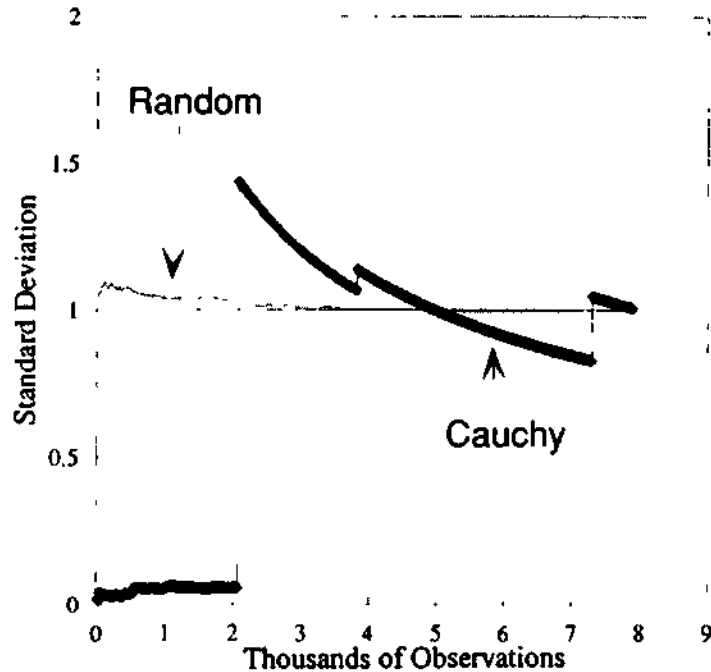


РИСУНОК 14.2a Конвергенция последовательного стандартного отклонения, функция Коши.

На рисунке 14.2(b) мы видим совсем другую ситуацию. Последовательное стандартное отклонение для данных индекса Доу-Джонса не сходится. Оно заканчивается в 1, потому что временной ряд был нормализован к стандартному отклонению 1, но не сходится. С другой стороны, кажется, что гауссов случайный временной ряд сходится при приблизительно 100 наблюдениях, а большие изменения в стандартном отклонении индекса Доу-Джонса представляют собой скачки – изменения прерывисты. Даже в конце графика, где мы имеем более 5200 наблюдений, появляются разрывы. Кажется, что флуктуации становятся менее сильными, но это происходит вследствие того, что ежедневное изменение в цене меньше влияет на среднее. Рисунок 14.3 – "увеличенный снимок" конца рисунка 14.2(b). Мы можем

видеть, что разрывы продолжаются. Это представляет собой влияние "бесконечной дисперсии". Дисперсии совокупности не существует, и использование выборочных дисперсий в качестве оценок может вводить в заблуждение. Существует поразительное сходство между поведением последовательного стандартного отклонения Коши и индексом Доу-Джонса.

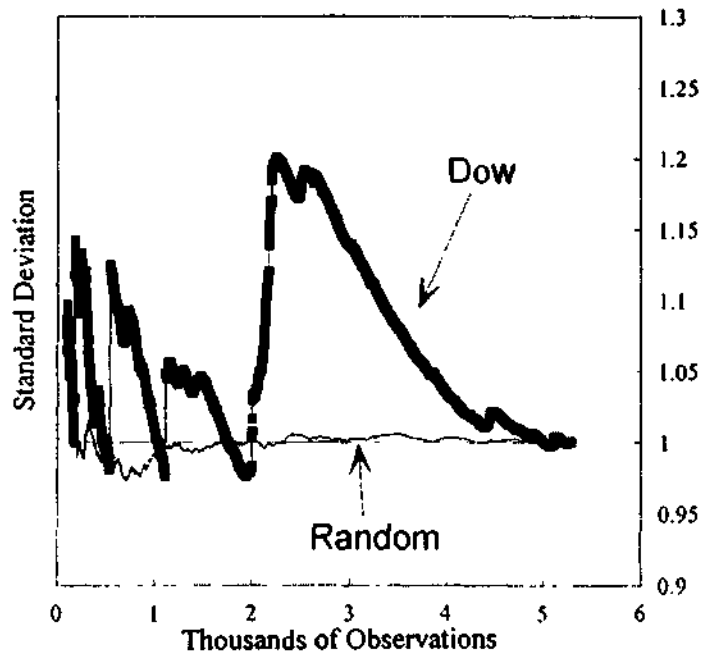


РИСУНОК 14.2b Последовательное стандартное отклонение, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли: 1888-1990 гг.

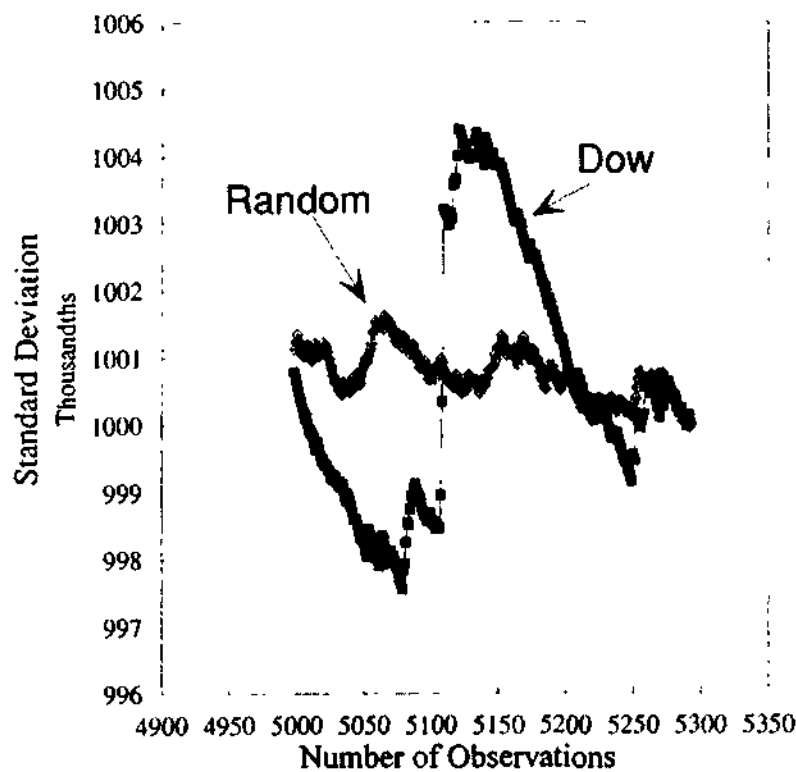


РИСУНОК 14.3 Конвергенция последовательного стандартного отклонения, индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний, пятидневные прибыли.

Часть 4. Фрактальный шум

Эти графики подтверждают идею о том, что в долгосрочной перспективе индекс Доу-Джонса характеризуется устойчивым средним и бесконечной памятью, наподобие устойчивых распределений Леви или фрактальных распределений.

В этом месте мне необходимо привести некоторые оговорки. Когда я заявляю, что рынок характеризуется бесконечной дисперсией, я не имею в виду, что дисперсия действительно бесконечна. Как и во всех фрактальных структурах, здесь, в конечном счете, есть интервал времени, в котором фрактальное масштабирование перестает работать. В предыдущих главах я говорил, что деревья представляют собой фрактальные структуры. Мы знаем, что ветви дерева не становятся бесконечно малыми. Аналогично, для рыночных прибылей мог бы существовать объем выборки, где дисперсия, действительно, становится конечной. Однако здесь мы можем увидеть, что после более чем 100 лет ежедневных данных стандартное отклонение все еще не сошло. Следовательно, для всех практических целей рыночные прибыли будут вести себя, как будто они являются бесконечными распределениями дисперсии. По крайней мере, мы можем предположить, что в пределах нашей жизни они будут вести себя, как будто они имеют бесконечную дисперсию.

Частные случаи: нормальное распределение и распределение Коши

В рамках характеристической функции устойчивых распределений есть два частных случая, которые являются известными распределениями. Используя систему обозначений $S(x; \alpha, \beta, c, \delta)$ для представления параметров устойчивого распределения x , мы кратко исследуем эти распределения:

1. Для $S(x; 2, 0, c, \delta)$ уравнение (14.3) сводится к:

$$\phi(t) = i\delta t - (\sigma^2/2)t^2 \quad (14.4)$$

где σ^2 = дисперсия нормального распределения

Это стандартный гауссов случай, где $c = 2\sigma^2$. Если мы также имеем $\delta = 0$, он становится стандартным нормальным распределением со средним 0 и стандартным отклонением 1.

2. Для $S(x; 1, 0, c, \delta)$ уравнение (14.4) сводится к:

$$\phi(t) = i\delta t - c |t| \quad (14.5)$$

Это логарифм характеристической функции для распределения Коши, которое, как известно, имеет бесконечную дисперсию и среднее. В этом случае δ становится медианой распределения, а c – семи-интерквартильным размахом.

Эти два известных распределения, распределение Коши и нормальное распределение, имеют много применений. Они также являются единственными двумя членами семейства устойчивых распределений, для которых могут быть явно выведены функции плотности вероятностей. Во всех других дробных случаях они должны быть оценены, обычно посредством численных средств. Мы обсудим один из этих методов в одном из последующих разделов этой главы.

Толстые хвосты и закон Парето

Когда $\alpha < 2$ и $\beta = 0$, оба хвоста следуют закону Парето. Как мы говорили ранее, Парето (Pareto, 1897) нашел, что логарифмическое нормальное распределение не описывало частоту уровней дохода у верхних 3 процентов населения. Вместо этого хвосты становились все более и более длинными, так что:

$$P(U > u) = (u/U)^\alpha \quad (14.6)$$

Мы опять имеем масштабный коэффициент согласно степенному закону. В этом случае степенной закон вызван характеристическим показателем α , и вероятность нахождения значения U , которое больше оценки u , зависит от альфы. Возвращаясь к исследованию Парето, вероятность нахождения того, чей доход в пять раз больше среднего, непосредственно связана со значением α .

Поведение распределения для различных значений β , когда $\alpha < 2$, является важным для опционного ценообразования, которое будет рассмотрено в Главе 15. Вкратце, когда β принимает экстремальные значения $+1$ или -1 , левый (или правый) хвост обращается в нуль для соответствующих значений беты, а остающийся хвост сохраняет свои характеристики Парето.

УСТОЙ) ИВОСТЬ ПРИ СЛОЖЕНИИ

Для теории портфеля нормальное распределение имело очень желательную характеристику. Сумма ряда IID переменных была все еще IID и управлялась нормальным распределением. Устойчивые распределения с одинаковым значением альфы имеют одинаковую характерную особенность. Приводимое ниже объяснение адаптировано из работы Фэна, Неоджи и Яшимы (Fan, Neogi, and Yashima, 1991).

Применяя уравнение (14.2) к уравнению (14.3), мы имеем:

$$E(e^{i*b_1*x_1}) * E(e^{i*b_2*x_2}) = E(e^{i*b*x}) \quad (14.7)$$

где x_1 , x_2 и x – приведенные устойчивые независимые случайные переменные, как описано выше.

Тогда:

$$E(e^{i*t*(b_1*x_1 + b_2*x_2)}) = E(e^{i*t*b*x}) \quad (14.8)$$

или, если " $\sim d \sim$ " означает "то же самое распределение",

$$b_1*x_1 + b_2*x_2 \sim d \sim b*x \quad (14.9)$$

Применяя это отношение к характеристическим функциям с использованием уравнения (14.3), мы находим следующую взаимосвязь:

$$\begin{aligned} & \exp[-(b_1^\alpha + b_2^\alpha) * |t|^\alpha * (1 + i*\beta*(t/|t|)*\tan(\alpha*\pi/2))] \\ & = \exp[-b^\alpha * |t|^\alpha * (1 + i*\beta*(t/|t|)*\tan(\alpha*\pi/2))] \end{aligned} \quad (14.10)$$

Теперь мы можем видеть что:

$$b_1^\alpha + b_2^\alpha = b^\alpha \quad (14.11)$$

Уравнение (14.11) сводится к более известному гауссову, или нормальному, случаю, когда альфа равняется 2.

На основании уравнения (14.11) мы можем видеть, что, если два распределения устойчивы, обладая характеристическим показателем α , их сумма также устойчива с характеристическим показателем α . Это применяется в теории портфеля. Если ценные бумаги в портфеле устойчивы, имея одинаковое значение альфы, сам портфель также устойчив, имея то же самое значение альфы. Фамэ (Fama, 1965b) и Самуэльсон (Samuelson, 1967) использовали эту взаимосвязь, чтобы адаптировать теорию портфеля Марковица (Markowitz, 1952) для бесконечных распределений дисперсии. Прежде чем мы исследуем практичность этих адаптаций, мы сначала должны рассмотреть характерные свойства устойчивых, фрактальных распределений.

ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Устойчивые распределения Леви имеют ряд желательных характерных свойств, благодаря которым они особо согласуются с наблюдаемым поведением рынка. Однако те же самые характеристики, как мы увидим, ставят под сомнение полезность устойчивых распределений.

Самоподобие

Почему теперь мы называем эти распределения не только устойчивыми, как называл их Леви, но еще и фрактальными? Масштабный параметр c является ответом. Если характеристический показатель α и параметр асимметрии β остаются теми же самыми, изменение c просто приводит к изменению масштаба распределения. После внесения поправки на масштаб вероятности остаются одинаковыми во всех масштабах с равными значениями α и β . Таким образом, α и β не зависят от масштаба, хотя c от него зависят. Это свойство делает устойчивые распределения самоподобными при изменениях в масштабе. Как только мы вносим поправку на масштабный параметр c , вероятности остаются теми же самыми. Ряды – и, следовательно, распределения – *безгранично делимы*. Эта самоподобная статистическая структура является причиной, по которой мы теперь говорим об устойчивых распределениях Леви как о фрактальных распределениях. Характеристический показатель α , который может принимать дробные значения между 1 и 2, является фрактальной размерностью пространства вероятностей. Подобно всем фрактальным размерностям, она представляет собой масштабное свойство процесса.

Аддитивность

Мы уже видели, что фрактальные распределения являются инвариантными при сложении. Это означает, что устойчивые распределения аддитивны. Две акции с одинаковым значением α и β могут быть сложены, и получающееся в результате

распределение вероятности будет иметь все те же значения α и β , хотя c и δ могут измениться. Нормальное распределение также обладает этой характеристикой, так что этот аспект МРТ остается незатронутым, пока все акции имеют одинаковые значения α и β . Моя предыдущая книга показывает, что, к сожалению, различные акции могут иметь различные показатели Херста и различные значения α . В настоящее время не существует теории об объединении распределений с различными альфами. ЕМН, предполагая нормальность для всех распределений, принимала $\alpha = 2,0$ для всех акций, что, как мы теперь знаем, неправильно.

Разрывы: скачки цен

Толстые хвосты во фрактальных распределениях вызваны усилением, и это усиление во временном ряду приводит к скачкам в процессе. Они подобны скачкам в последовательной дисперсии для Коши и Доу-Джонса. Таким образом, большое изменение во фрактальном процессе происходит из небольшого количества больших изменений, а не из большого количества небольших изменений, как подразумевается в гауссовом случае. Эти изменения имеют тенденцию быть резкими и прерывистыми – еще одно проявление эффекта Ноя. Мандельброт (Mandelbrot, 1972, 1982) называл это *синдромом бесконечной дисперсии*.

Эти большие прерывистые события являются причиной того, что мы имеем бесконечную дисперсию. Нетрудно понять, почему они происходят на рынках. Когда на рынке начинается паника, страх порождает еще больший страх, будь то страх потери капитала или потери возможности. Это усиливает медвежье/бычье настроение и приводит к разрывам в цене исполнения, так же как в ценах предложения/запрашиваемых ценах. Согласно фрактальной гипотезе рынка, эти периоды неустойчивости происходят, когда рынок теряет свою фрактальную структуру: когда долгосрочные инвесторы больше не участвуют на рынке, и риск сконцентрирован в одном, обычно коротком, инвестиционном горизонте. Через измеренное время эти большие изменения затрагивают все инвестиционные горизонты. Несмотря на тот факт, что долгосрочные инвесторы не участвуют в течение неустойчивого периода (потому что они или покинули рынок, или стали краткосрочными инвесторами), на доходность в этом горизонте все еще оказывается воздействие. Синдром бесконечной дисперсии затрагивает все инвестиционные горизонты в измеренное время.

ИЗМЕРЕНИЕ α

Фамэ (Fama, 1965a) описывает несколько различных способов измерения α . В настоящее время кажется, что R/S-анализ и спектральный анализ предлагают самый надежный метод вычисления α , но эти альтернативные методы могут использоваться в качестве подтверждения.

Первоначальный метод, рекомендованный Мандельбротом (Mandelbrot, 1964) и Фамэ (Fama, 1965b), происходил из взаимосвязи между хвостами и законом Парето, описанной в уравнении (14.6). Путем деления обеих частей уравнения (14.6) на правый член и последующего логарифмирования мы получаем:

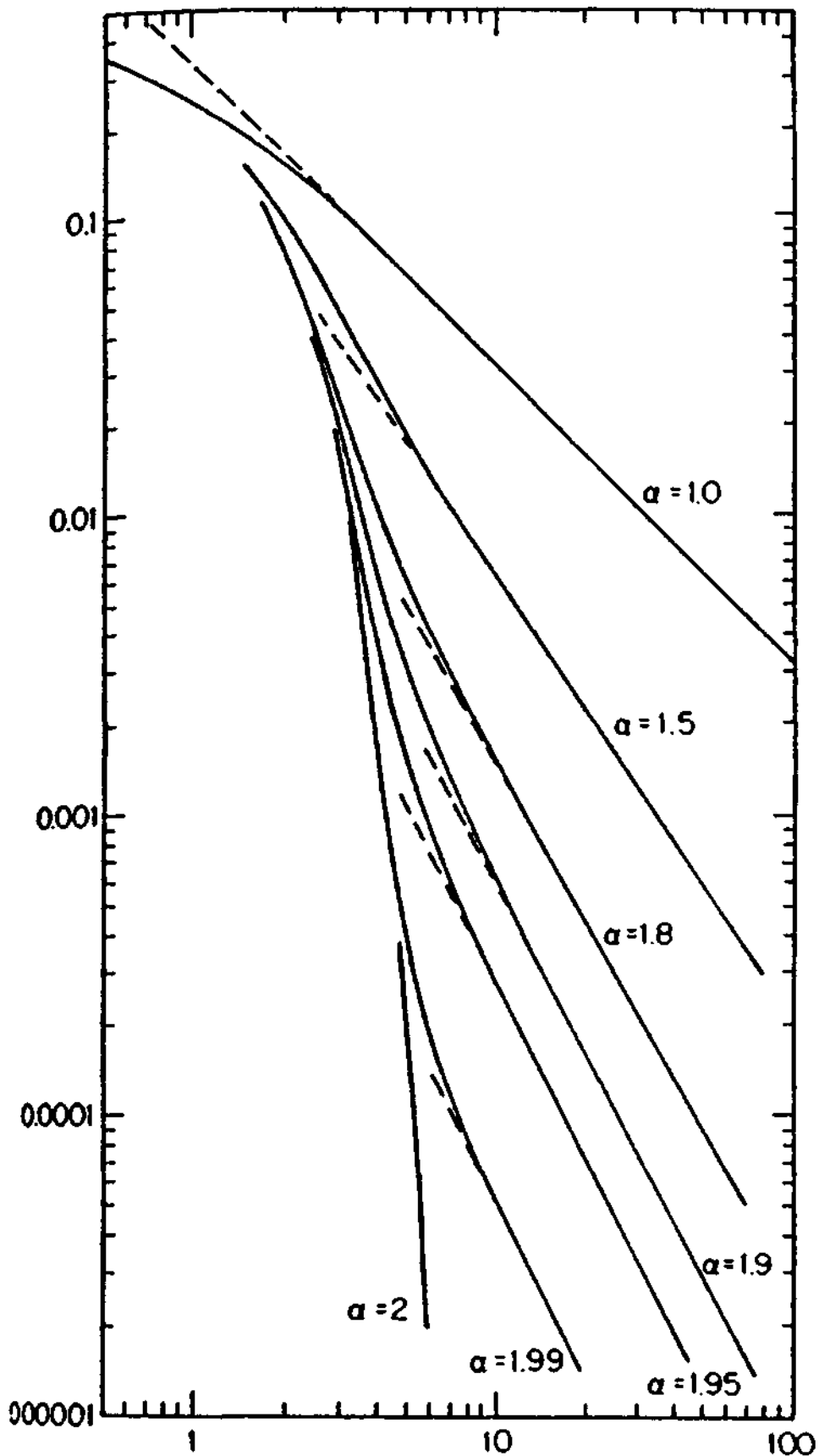


РИСУНОК 14.4 График в логарифмическом масштабе по обеим осям для различных значений α . (Из работы Мандельброта (Mandelbrot, 1964).

$$\log(P(U_1 > u)) = -\alpha \log(u) - \log(U_1) \quad (14.7a)$$

$$\log(P(U_2 < u)) = -\alpha \log|u| - \log(U_2) \quad (14.7b)$$

Уравнения (14.7a) и (14.7b) – для положительных и отрицательных хвостов соответственно. Эти уравнения подразумевают, что наклон графика в логарифмическом масштабе по обеим осям должен асимптотически иметь наклон, равный $-\alpha$. Принятый метод выполнения этого анализа состоит в том, чтобы составить график частоты в логарифмическом масштабе по обеим осям в положительном и отрицательном хвосте против абсолютного значения частоты. Когда хвост достигнут, наклон должен быть приблизительно равен α , в зависимости от размера выборки. Рисунок 14.4 взят из работы Мандельброта (Mandelbrot, 1964) и показывает теоретический график в логарифмическом масштабе по обеим осям для различных значений α .

На рисунке 14.5 приведен график в логарифмическом масштабе по обеим осям для ежедневных данных согласно индексу Доу-Джонса, используемых в данной книге. Область хвостов и для положительных, и для отрицательных хвостов имеет достаточно наблюдений для хорошего считывания α . Приблизительное значение в 1,66 соответствует более ранним исследованиям Фамэ (Fama, 1965b).

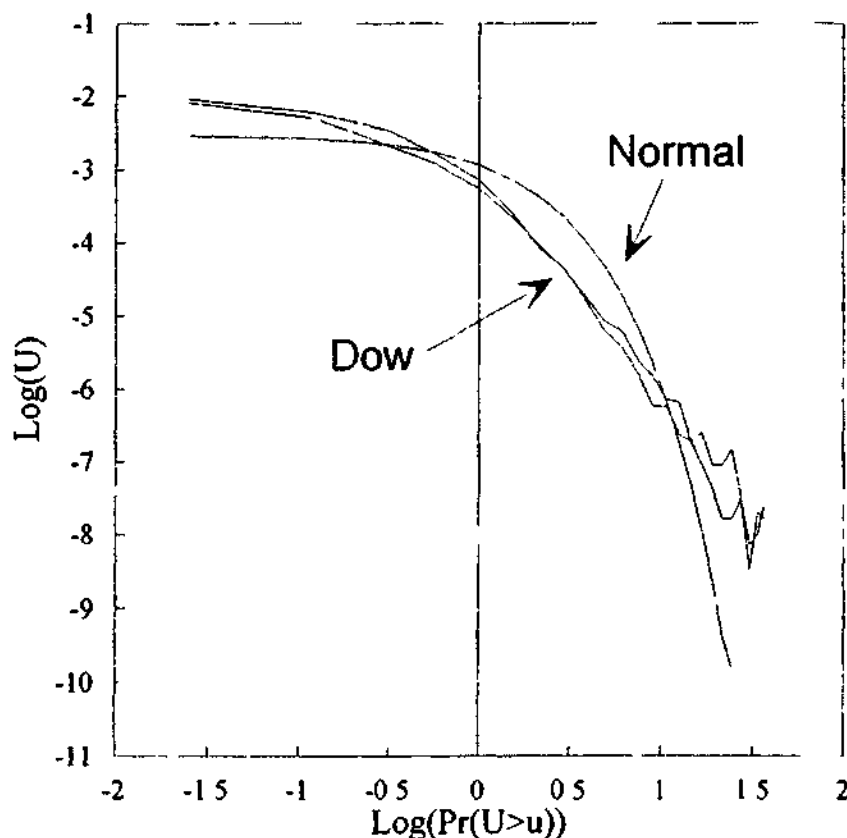


РИСУНОК 14.5 Оценка альфы, графический метод: ежедневный индекс Доу-Джонса для акций промышленных компаний.

Графический метод с логарифмическим масштабом по обеим осям работает хорошо в присутствии больших наборов данных, таких как ежедневные временные ряды индекса Доу-Джонса. Однако для меньших наборов данных он менее надежен.

Часть 4. Фрактальный шум

Этот метод критиковал Кутнер (Cootner, 1964), который заявил, что одни толстые хвосты не являются неоспоримым доказательством того, что устойчивое распределение является единственным выбором. Эта критика еще более непреодолима в наши дни с появлением моделей ARCH и других распределений с толстыми хвостами. Следовательно, графический метод должен использоваться в сочетании с другими испытаниями.

R/S-анализ

Мандельброт не знал о методе нормированного размаха (R/S-анализе) до конца 1960-х гг. Даже в то время его работа с использованием R/S-анализа была, прежде всего, ограничена его первоначальной областью исследований, гидрологией. Когда Фамэ писал свою диссертацию (Fama, 1965a), он также не знал о R/S-анализе. Однако он был знаком с рэнджевым анализом, как и большинство экономистов, и разработал взаимосвязь между масштабированием диапазона устойчивой переменной и α . В Главе 5 мы видели, что работа Феллера (Feller, 1951), прежде всего, имела дело с масштабированием диапазона и его отношением к показателю Херста. Здесь мы видоизменим работу Фамэ и приведем дополнительную информацию о нормированном размахе и показателе Херста.

Сумма устойчивых переменных с характеристическим показателем альфа приводит к новой переменной с характеристическим показателем альфа, хотя масштаб изменится. Фактически, масштаб распределения сумм равен $n^{1/\alpha}$, умноженному на масштаб индивидуальных сумм, где n – число наблюдений. Если масштаб увеличивается с ежедневного до еженедельного, масштаб увеличивается на $5^{1/\alpha}$, где 5 – число дней в неделю.

Если мы определяем сумму R_n как сумму устойчивой переменной в определенном интервале n , а r_1 как начальное значение, то имеет место следующее соотношение:

$$R_n = R_1 * n^{1/\alpha} \quad (14.8)$$

Это уравнение близко уравнению (4.7) для нормированного размаха. В нем показано, что сумма значений n изменяет масштаб $n^{1/\alpha}$ раз по сравнению с начальным значением. То есть сумма пятидневных прибылей с характеристической альфой эквивалентна однодневным прибылям, умноженным на $5^{1/\alpha}$. Логарифмируя обе части уравнения (14.8) и вычисляя альфу, мы получаем:

$$\alpha = \frac{\log(n)}{\log(R_n) - \log(R_1)} \quad (14.9)$$

Вспомним из уравнения (4.х), что

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log(n)}$$

Если логарифм размаха $R_n - R_{R1}$ приблизительно равен нормированному размаху R/S, мы можем постулировать следующее соотношение:

$$\alpha = \frac{1}{H} \quad (14.10)$$

Фрактальная размерность пространства вероятностей таким образом связана с фрактальной размерностью временного ряда. Как это часто бывает, две фрактальных размерности будут иметь подобные значения, хотя они измеряют различные аспекты процесса. H измеряет фрактальную размерность проекции прямой времени фрактальной размерностью $2 - H$, но оно также связано со статистическим самоподобием процесса через форму уравнения (14.10). Однако $1/H$ измеряет фрактальную размерность пространства вероятностей.

Фамэ (Fama, 1965a) упоминал большинство недостатков R/S-анализа, которые мы уже обсудили, особенно тот факт, что при вовлечении процесса короткой памяти диапазон может быть смещен. Мы уже имели дело со смещениями. Вообще, Фамэ нашел, что анализ диапазона давал устойчивые значения альфы, которые соответствовали результатам графического метода с логарифмическим масштабом по обеим осям. R/S-анализ дает еще более устойчивые значения, поскольку он делает диапазон безразмерным, выражая его в терминах местного стандартного отклонения.

Спектральный анализ

Мы уже видели в Главе 13 связь между показателем Херста H и спектральным показателем β_s . (Теперь мы будем именовать спектральный показатель как β_s , чтобы отличить его от показателя асимметрии β). Уравнение (14.10) позволяет нам выразить отношение с β_s :

$$\alpha = \frac{\beta_s - 1}{2} \quad (14.11)$$

В Главе 13 мы нашли $\beta_s = 2,45$ для ежедневных данных по индексу Доу-Джонса. Это подразумевает, что $\alpha = 1,73$, что также близко к значению 1,7, вычисленному Фамэ (Fama, 1965a).

ИЗМЕРЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Как мы говорили ранее, главная проблема семейства устойчивых распределений состоит в том, что они не подходят для решений в замкнутой форме, кроме частных случаев нормальных распределений и распределений Коши. Поэтому функции плотности вероятности не могут быть явно определены. Вероятности могут быть решены только численно, что немного утомительно. К счастью, некоторые исследователи уже выполнили решения для некоторых общепринятых значений.

Холт и Кроу (Holt and Crow, 1973) нашли функцию плотности вероятностей для $\alpha = 0,25 - 2,00$ и β равного от $-1,00$ до $+1,00$, оба в приращениях $0,25$. Используемая ими методология интерполировала между известными распределениями, типа распределений Коши и нормальных распределений, и интегрального представления из работы Золотарева (Zolotarev, 1964/1966). Таблицы, подготовленные для бывшего

Часть 4. Фрактальный шум

Национального бюро стандартов, остаются самым полным представлением функций плотности вероятностей устойчивых распределений.

Некоторые читатели могут найти функцию плотности вероятностей полезной; большинство же читателей больше заинтересованы в кумулятивных распределениях вероятностей, которые можно непосредственно сравнить с частотными распределениями, как это делалось в Главе 2. Фамэ и Ролл (Fama and Roll, 1968, 1971) создали таблицы распределения кумулятивных вероятностей для широкого диапазона альфа. Однако они сосредоточили свое внимание на симметричных устойчивых распределениях, ограничивая, таким образом, β до 0. Много раз было показано, что рынки ассиметричны, но влияние этой ассиметрии на рыночный риск не очевидно. Мы можем предположить, что эти симметричные значения будут достаточными для большинства применений.

В Приложении 3 воспроизведены распределения кумулятивных вероятностей из исследований Фамэ и Ролла. Приложение также кратко описывает методологию оценки.

БЕЗГРАНИЧНАЯ ДЕЛИМОСТЬ И IGARCH

В данной книге много раз упоминалось семейство распределений ARCH. Причина очевидна: ARCH – единственная вероятная альтернатива семейству фрактальных распределений. Помимо иных многочисленных причин ее популярности кажется, что ARCH согласуется с эмпирическими результатами. Процессы ARCH характеризуются распределениями вероятностей, которые имеют высокие пики и толстые хвосты, как мы видели опытным путем для многочисленных рынков. Логически, это заставляет предположить, что условная дисперсия важна. Будучи инвесторами, мы знаем о недавней рыночной волатильности, так что именно будущая волатильность будет реакцией на наш недавний опыт.

Однако есть и недостатки. Процессы ARCH не являются процессами долговременной памяти, будучи измеренными R/S-анализом. Тем не менее, возможно, что два процесса могут сосуществовать – фактически, очень вероятно, что они измеряют различные аспекты одного и того же.

ARCH – *локальный* процесс. Он говорит о том, что будущая волатильность измеряется нашим опытом прошлой волатильности. Однако он работает только для определенных инвестиционных горизонтов. Нельзя, например, взять волатильность недельных прибылей и предсказать будущую дневную волатильность. Этот процесс зависит от инвестиционного горизонта, и анализ работает только в пределах такого местного интервала времени.

Фрактальные процессы, с другой стороны, являются *глобальными* структурами; они имеют дело со всеми инвестиционными горизонтами одновременно. Они измеряют безусловную дисперсию (а не условную, как делает ARCH). В Главе 1 мы исследовали процессы, которые имеют локальную случайность и глобальную структуру. Возможно, что GARCH, с его конечной условной дисперсией, является местным эффектом фрактальных распределений, которые имеют бесконечную,

безусловную дисперсию. В примере с сосной в Главе 1 общая структура дерева была очевидна, только когда мы смотрели на всю структуру, исследуя все ее ветви одновременно. При исследовании каждой отдельной ветви мы вступали в сферу локальной случайности. В отношениях между ARCH и его вариантами и фрактальным семейством распределений может быть сходство.

Как оказывается, некоторые члены семейства ARCH действительно соответствуют этому критерию. В частности, модели интегрированной дисперсии, или IGARCH, Ингла и Боллерслева (Engle and Bollerslev, 1986) характеризуются бесконечной безусловной дисперсией. Линейная модель GARCH (p,q) уравнения (5.12) содержит приблизительный единичный корень в авторегрессионном многочлене, так что $f_1 + \dots + f_q + g_1 + \dots + g_p = 1$. Боллерслев, Чоу и Кронер (Bollerslev, Chou and Kroner, 1990) утверждали: "Как в мартингальной модели для условных средних, текущая информация остается важной для прогнозов условной дисперсии для всех горизонтов. В качестве примера покажем, что в простой модели IGARCH (1,1), где $f_1 + g_1 = 1$, прогноз с минимальной среднеквадратической ошибкой для условной дисперсии s приводит к $\omega^*(s - 1) + \sigma_{t+1}^2$ " (курсив автора). В результате этого процесса бесконечной памяти безусловная память для модели IGARCH (p,q) не существует. Кроме того, существует сильная взаимосвязь с классом моделей ARIMA, обсуждаемых в Главе 5, которые уже имеют дробную форму.

Эта взаимосвязь здесь постулируется без доказательств, но она является интригующей и соответствует фрактальной гипотезе рынка. Кроме того, она соответствует фрактальной структуре других систем; обладающих локальной случайностью, характеризующейся ARCH; и обладающих глобальной структурой безусловной бесконечной дисперсии, согласующейся с фрактальными распределениями. Мы оставим формальное доказательство для будущего исследования.

ВЫВОДЫ

В этой главе мы исследовали фрактальную статистику. Ее статистический эквивалент, подобно другим фракталам, не подходит для чистых решений в замкнутой форме. Однако фрактальные распределения имеют ряд желательных характеристик:

1. Стабильность при сложении: сумма двух или более распределений, которые являются фрактальными с характеристическим показателем α , сохраняет ту же форму и характеристический показатель α .
2. Самоподобие: фрактальные распределения безгранично делимы. При изменении масштаба времени α остается той же самой.
3. Они характеризуются высокими пиками в среднем и толстыми хвостами, что соответствует эмпирическим характеристикам рыночных распределений.

Наряду с этими желательными характеристиками, у распределений есть свойственные проблемы:

Часть 4. Фрактальный шум

1. Бесконечная дисперсия: вторые моменты не существуют. Дисперсия ненадежна как мера рассеяния или риска.
2. Скачки: большие изменения цен могут быть большими и прерывистыми.

Эти характеристики нежелательны только с математической точки зрения. Как согласится любой инвестиционный практик, эти математические "проблемы" типичны для фактического поведения рынков. Представляется более разумным скорректировать наши модели таким образом, чтобы они могли объяснять этот фрагмент действительности, а не наоборот. Платон, возможно, говорил, что это – не реальный мир, но когда он так говорил, он не инвестировал свои деньги.

Следующая глава будет иметь дело с двумя областями, в которых мы должны, по крайней мере, сделать поправку на стандартную теорию: выбор портфеля и ценообразование опционов.

Применение фрактальной статистики

В предыдущей главе мы видели возможную замену нормального распределения как вероятностной функции для описания рыночных прибылей. Эта замена называлась, поочередно, *устойчивыми распределениями Леви*, *устойчивыми распределениями Парето* или *распределениями Парето-Леви*. Теперь мы можем добавить *фрактальные распределения* – название, которое лучше их описывает. Поскольку традиционные названия даны в честь математиков, которые их создали, мы будем использовать все эти названия попеременно.

Мы видели, что эти распределения имеют исключительное свойство, которое затрудняет их ассимилирование в стандартную теорию рынка капитала (СМТ). Эти распределения имеют бесконечную или неопределенную дисперсию. Поскольку СМТ зависит от дисперсии как меры риска, это, казалось бы, наносило главный удар по полноценности современной теории портфеля (МРТ) и ее производных. Однако в начале существования МРТ не было столь высокого единодушия в отношении того, что рыночные прибыли были нормально распределенными. В результате многие из самых светлых умов того времени развили методы адаптирования СМТ к устойчивым распределениям Леви. Фамэ (Fama, 1965b) и Самуэльсон (Samuelson, 1967) независимо разработали способ обобщения метода оптимизации среднего/дисперсии Марковица (Markowitz, 1952). Этот способ был далее описан в работах Фамэ и Миллера (Fama and Miller, 1972), а также Шарпа (Sharpe, 1970), но в то время научным сообществом было решено, что доказательств для того, чтобы отвергнуть гипотезу Гаусса (случайное блуждание) и заменить ее устойчивой гипотезой Парето, было недостаточно. По крайней мере, было недостаточно доказательств для тех трудностей, которые устойчивые распределения Парето причиняли с математической точки зрения.

Мы видели в данной книге важные подтверждения фрактальных распределений, так что кажется уместным вспомнить о более ранней работе Фамэ и Самуэльсона в надежде, что другие исследователи в дальнейшем разовьют ее идеи. В этой главе мы как раз это и сделаем. Кроме того, мы рассмотрим работу Маккаллока (McCulloch, 1985), который вывел альтернативу формуле опционного ценообразования Блэка-Шоулса, используя устойчивые распределения Леви. Учитывая широко распространенное использование формулы Блэка-Шоулса, представляется уместным исследовать ее более общую форму.

Приведенная ниже работа имеет свои недостатки. Например, адаптации Фамэ и Самуэльсона предполагают, что все ценные бумаги имеют один и тот же характеристический показатель α . Гипотеза Гаусса предполагала, что все акции имели $\alpha = 2,0$, и при таком предположении универсальное значение в 1,7 не казалось большим изменением. Несмотря на это ограничение, работа стоит повторного

изучения, и, принося извинения первоначальным авторам, я сделаю это в данной главе.

ВЫБОР ПОРТФЕЛЯ

Марковиц (Markowitz, 1952) совершил большой прорыв в СМТ. Он показал, как проблема выбора портфеля могла быть проанализирована через оптимизацию среднего-дисперсии. За это он получил Нобелевскую премию по экономике. Марковиц переформулировал проблему в предпочтение риска против доходности. Доходность была *ожидаемой* доходностью акций, но она была менее спорной частью теории. Для портфеля ожидаемая доходность представляет собой просто взвешенное среднее ожидаемых доходов по отдельным акциям в портфеле. Риск по отдельным акциям был стандартным отклонением доходности акций, или σ . Однако риск портфеля был больше, чем просто суммированный риск по отдельным акциям. Необходимо принять во внимание ковариацию портфеля:

$$\sigma_{a,b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2 * \rho_{a,b} * \sigma_a * \sigma_b \quad (15.1)$$

где $\rho_{a,b}$ = корреляция между акциями a и b

Для вычисления риска портфеля стало важным знать, что две акции могут быть скоррелированы. Если имеет место положительная корреляция, то суммированный риск двух акций будет больше, чем риск двух акций по отдельности. Однако если имеет место отрицательная корреляция, то суммированный риск этих двух акций будет меньше, чем риск по любой из акций в отдельности. Они будут диверсифицировать друг друга. Уравнение (15.1) вычисляет риск двух акций, a и b, но оно может быть обобщено для любого числа акций. В первоначальной формулировке, которая широко используется, ожидаемый доход и риск рассчитываются для каждой комбинации всех акций в портфеле. Портфель с самым высоким ожидаемым доходом для данного уровня риска назывался *эффективным* портфелем. Совокупность всех эффективных портфелей называлась *эффективной границей*. Оптимизация средней доходности против дисперсии привела к появлению термина *эффективность среднего/дисперсии*, или оптимизация. Таким образом, Марковиц измерил, как портфели могут быть рационально построены и как диверсификация уменьшает риск. Это было удивительным достижением.

Тем не менее, используя фрактальные распределения, мы имеем две проблемы: (1) дисперсию и (2) коэффициент корреляции. Очевидная проблема связана с дисперсией. В среде среднего/дисперсии дисперсия является мерой риска акции и портфеля. Фрактальные распределения не имеют дисперсии для оптимизации. Однако есть член рассеяния s , который также может использоваться для измерения риска. Более трудная проблема связана с коэффициентом корреляции ρ . В устойчивом семействе нет сопоставимого понятия, за исключением частного случая нормального распределения. На первый взгляд, отсутствие коэффициента корреляции было бы ударом по применимости фрактальных распределений к рынкам. Коэффициенты корреляции используются часто, особенно для формулировки стратегий

15. Применение фрактальной статистики

хеджирования. Однако известно, что корреляции неустойчивы, как обнаружили многие хеджеры.

Недостаток корреляции между ценными бумагами согласно фрактальной гипотезе делает непрактичной традиционную оптимизацию среднего/дисперсии. Вместо этого может быть адаптирована одноиндексная модель Шарпа (Sharpe, 1964). Одноиндексная модель дала нам первую версию известной меры относительного риска, беты. Однако мы уже дважды использовали греческую букву β в этой книге. Поэтому мы будем обозначать эту бету как b . Важно обратить внимание, что бета одноиндексной модели отличается от беты, позднее выведенной Шарпом для CAPM. Бета одноиндексной модели является просто мерой чувствительности доходности акций к индексной доходности (index return). Она не является экономической конструкцией подобно бете CAPM.

Одноиндексная модель выражается следующим образом:

$$R_i = a_i + b_i * I + d_i \quad (15.2)$$

где b_i = чувствительность акции i к индексу I

a_i = неиндексная доходность акции (nonindex stock return)

d_i = параметр ошибки (error term), со средним 0

Параметры обычно находятся посредством регрессирования доходности акции на индексную доходность. Наклон – это b , а отрезок, отсекаемый на координатной оси, – a . В устойчивом случае Парето можно допустить, что распределение индексных прибылей I и прибылей акций R является устойчивым паретианом с тем же самым характеристическим показателем α . d также являются членами устойчивого семейства Парето и не зависят от прибылей по акциям и индексных прибылей.

Риск портфеля, c_p , может быть выражен следующим образом:

$$c_p = \sum_{i=1}^N X_i^\alpha * c_{d_i} + b_p^\alpha * c_I \quad (15.3)$$

где X_i = вес акции i

c_p = параметр дисперсии портфеля

c_{d_i} = параметр дисперсии d_i

c_I = параметр дисперсии индекса I

$$b_p = \sum_{i=1}^N X_i * b_i = \text{чувствительность прибылей портфеля к } I$$

Опять же, для нормального распределения $\alpha = 2,0$, а $c_j = \sigma_j^2 / 2$ для $j = p, d_i$ и I .

Однако для других членов устойчивого семейства вычисления могут быть весьма сложными. Например, мы еще не обсуждали, как оценить меру дисперсии c . Мы можем использовать альтернативу устойчивого параметра Парето, c ; то есть мы можем использовать среднее абсолютное отклонение, или первый момент. Хотя в устойчивом семействе вторые моменты не существуют, первые моменты конечны.

Часть 4. Фрактальный шум

Фамэ и Ролл (Fama and Roll, 1971) сформулировали метод оценки c . Среднее абсолютное отклонение вычислить легче, но Фамэ и Ролл обнаружили, посредством моделирования методом Монте-Карло, что среднее абсолютное отклонение является менее эффективной оценкой c , чем их оценка. Таблица 3 в Приложении 3 воспроизведена из работы 1971 г. Важно обратить внимание на то, что все вычисления Фамэ и Ролла (1969, 1971) выполнялись для приведенного случая, $c = 1$ и $\delta = 0$.

Они оценили c на основании выборочных квантилей, приведенных в таблице 3 Приложения 3. Они нашли, что подходит квантиль 0,72, поскольку он мало изменяется для различных уровней альфы. Следовательно, использование квантиля 0,72 приводит к тому, что оценка c будет мало затронута уровнем альфы. Они нашли, что "разумная формула оценки c " такова:

$$\hat{c} = (1/(2 * 0,827)) * (\hat{x}_{0,72} - \hat{x}_{0,28}) \quad (15.4)$$

где \hat{x}_f – статистика порядка $f(N + 1)$ из таблицы 3 в Приложении 3, использованная для оценки квантилей 0,28 и 0,72. Фамэ и Ролл (Fama and Roll, 1971) нашли, что оценка c в уравнении (15.4) является лучшей несмещенной оценкой.

Однако, одним из следствий уравнения (15.3) является тот факт, что эффект диверсификации первоначальной рыночной модели сохраняется. Число активов не уменьшает рыночный риск непосредственно, но оно действительно уменьшает нерыночный риск d отдельных акций i . Если мы возьмем простой случай, где все $X_i = 1/N$, то параметр ошибки (error term) в уравнении (15.3) становится следующим:

$$c_p^\alpha = \left(\frac{1}{N}\right)^\alpha * \sum_{i=1}^N c_i^\alpha \quad (15.5)$$

Пока $\alpha > 1$, остаточный риск c_p уменьшается по мере увеличения числа активов N . Интересно отметить, что если альфа равна 1, то эффекта диверсификации нет; если альфа меньше 1, увеличение размера портфеля увеличивает нерыночный риск.

Фамэ и Миллер (Fama and Miller, 1972) использовали следующий пример. Предположим, что $c_i^\alpha = 1$, а $X_i = 1/N$ для всех акций i в портфеле. Другими словами, все акции одинаково взвешены с риском в 1,0. Тогда уравнение (15.5) сводится к следующему:

$$c_p^\alpha = T^{1-\alpha} \quad (15.6)$$

В таблице 15.1 и на рисунке 15.1 показан эффект диверсификации для различных α и N с использованием уравнения (15.6). Читатель также может получить эти числа просто в электронной таблице. Как и предсказывалось, для $\alpha < 1,0$ диверсификация действительно уменьшает нерыночный риск портфеля. Степень диверсификации уменьшается по мере уменьшения α до тех пор, пока, при $\alpha = 1,0$, диверсификация ничего не делает для портфеля. Центральная предельная теорема не выполняется, когда $\alpha = 1$, и работает в обратном направлении для $\alpha > 1$.

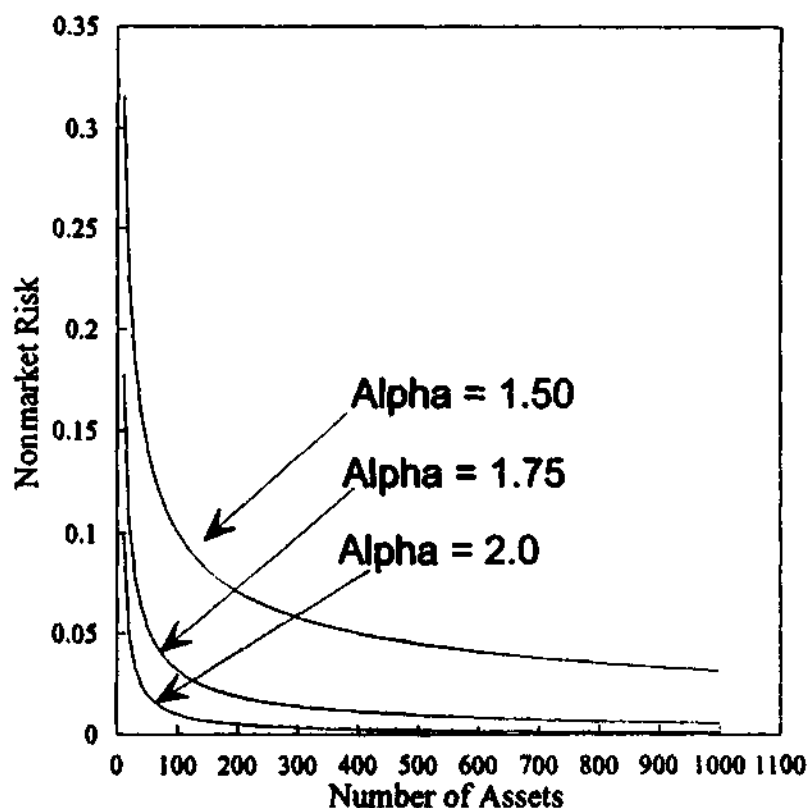


РИСУНОК 15.1 Диверсификация.

В контексте фрактальной статистики это имеет глубокий смысл. Антиперсистентные ряды имеют более зазубренные временные ряды, чем персистентные или случайные ряды. Сложение антиперсистентных систем привело бы лишь к более шумной системе.

С другой стороны, подверженность рынку (market exposure) не является вопросом диверсификации; она представляет собой взвешенное среднее для b отдельных ценных бумаг в портфеле. Следовательно, как и в традиционной модели рынка, диверсификация уменьшает нерыночный риск, а не рыночный риск.

Адаптация традиционной СМТ к устойчивым распределениям была искусной, но, главным образом, осталась неуслышанной. Просто она была слишком сложной по сравнению со стандартным гауссовым случаем. В то время было недостаточно неоспоримых доказательств, показывающих, что рынки не были гауссовыми.

Теперь мы располагаем более убедительными доказательствами. Однако адаптация имеет свои трудности. Главная из них – сохранение коэффициента чувствительности b из традиционной модели рынка. Это обычно устанавливалось как линейное соотношение между отдельными ценными бумагами и рыночным портфелем I . Это соотношение было сохранено, потому что в то время Фамэ, Ролл и Самуэльсон не знали о работе Херста и важности персистентности и антиперсистентности. Однако для достаточно большого портфеля можно ожидать, что описанный выше эффект диверсификации, относительно рыночного портфеля, будет довольно устойчив. Таким образом, оптимизация портфеля относительно рыночного индекса будет более устойчивой, чем прямая оптимизация среднего/дисперсии.

Часть 4. Фрактальный шум

Таблица 15.1 Эффекты диверсификации: нерыночный риск

N	Alpha (α)					
	2,00	1,75	1,50	1,25	1,00	0,50
10	0,1000	0,1778	0,3162	0,5623	1,0000	3,1623
20	0,0500	0,1057	0,2236	0,4729	1,0000	4,4721
30	0,0333	0,0780	0,1826	0,4273	1,0000	5,4772
40	0,0250	0,0629	0,1581	0,3976	1,0000	6,3246
50	0,0200	0,0532	0,1414	0,3761	1,0000	7,0711
60	0,0167	0,0464	0,1291	0,3593	1,0000	7,7460
70	0,0143	0,0413	0,1195	0,3457	1,0000	8,3666
80	0,0125	0,0374	0,1118	0,3344	1,0000	8,9443
90	0,0111	0,0342	0,1054	0,3247	1,0000	9,4868
100	0,0100	0,0316	0,1000	0,3162	1,0000	10,0000
110	0,0091	0,0294	0,0953	0,3088	1,0000	10,4881
120	0,0083	0,0276	0,0913	0,3021	1,0000	10,9545
130	0,0077	0,0260	0,0877	0,2962	1,0000	11,4018
140	0,0071	0,0246	0,0845	0,2907	1,0000	11,8322
150	0,0067	0,0233	0,0816	0,2857	1,0000	12,2474
160	0,0063	0,0222	0,0791	0,2812	1,0000	12,6491
170	0,0059	0,0212	0,0767	0,2769	1,0000	13,0384
180	0,0056	0,0203	0,0745	0,2730	1,0000	13,4164
190	0,0053	0,0195	0,0725	0,2693	1,0000	13,7840
200	0,0050	0,0188	0,0707	0,2659	1,0000	14,1421
250	0,0040	0,0159	0,0632	0,2515	1,0000	15,8114
300	0,0033	0,0139	0,0577	0,2403	1,0000	17,3205
350	0,0029	0,0124	0,0535	0,2312	1,0000	18,7083
400	0,0025	0,0112	0,0500	0,2236	1,0000	20,0000
450	0,0022	0,0102	0,0471	0,2171	1,0000	21,2132
500	0,0020	0,0095	0,0447	0,2115	1,0000	22,3607
550	0,0018	0,0088	0,0426	0,2065	1,0000	23,4521
600	0,0017	0,0082	0,0408	0,2021	1,0000	24,4949
650	0,0015	0,0078	0,0392	0,1980	1,0000	25,4951
700	0,0014	0,0073	0,0378	0,1944	1,0000	26,4575
750	0,0013	0,0070	0,0365	0,1911	1,0000	27,3861
800	0,0013	0,0066	0,0354	0,1880	1,0000	28,2843
850	0,0012	0,0064	0,0343	0,1852	1,0000	29,1548
900	0,0011	0,0061	0,0333	0,1826	1,0000	30,0000
950	0,0011	0,0058	0,0324	0,1801	1,0000	30,8221
1.000	0,0010	0,0056	0,0316	0,1778	1,0000	31,6228

Вторая проблема заключается в значении самого α . Адаптация предполагает, что все ценные бумаги в портфеле имеют одинаковое значение α . Это необходимо, потому что сумма устойчивых переменных Парето с одинаковым характеристическим показателем α приведет к новому распределению, которое все

еще имеет тот же самый характеристический показатель α . Это – свойство аддитивности, которое обсуждалось в Главе 14. Однако я показал, что различные акции могут иметь различные показатели Херста и, следовательно, различные значения α . (См. Peters (1991a, 1992)). К сожалению, теории для сложения распределений с различными значениями α не существует.

Кажется разумным, что теперь этот процесс должен быть пересмотрен и что необходимо выполнение дальнейшей работы для обобщения подхода и минимизации воздействия этих все еще неприятных проблем.

ОЦЕНКА ОПЦИОНА

В Главе 10, мы обсуждали формулу Блэка-Шоулса (Black, Scholes, 1973). Важно помнить, что основная формула предназначена для "европейских" опционов – опционов, которые могут быть исполнены только по наступлении срока. Мы обсуждали использование уравнения (10.1) для изучения волатильности, но его первоначальная цель состояла в вычислении справедливой цены опциона. Кажется, что формула работает достаточно хорошо, когда опцион имеет нулевую внутреннюю стоимость, или близкую к нулю, но большинство опционных трейдеров находят, что формула ненадежна, когда опционы находятся глубоко "без-денег" (out-of-the-money). Опционы всегда будут иметь стоимость, даже когда формула Блэка-Шоулса говорит, что они фактически должны стоить ноль. Существует много объяснений этого систематического отступления от формулы. Самое разумное – толщина отрицательного хвоста в наблюдаемом частотном распределении прибылей по акциям. Рынок знает, что вероятность большого события больше, чем говорит нам нормальное распределение, и оценивает опцион соответственно.

Еще одна проблема заключается в прерывности самого ценообразования. Нормальное распределение является непрерывным. Если прибыли по акциям регулируются нормальным распределением, то, когда курс акций перемещается с 50 до 45, предполагается, что он проходит через все промежуточные цены, чтобы достичь до этой цены. Однако опыт показывает, что все курсы ценных бумаг подвержены разрывам. Акции часто перескакивают через промежуточные цены при чрезвычайных движениях, также как валюта или облигации. Мертон (Merton, 1976) предложил класс пуассоновских скачкообразных процессов для больших движений на фоне гауссовых изменений для небольших движений. Этот процесс безгранично делим, также как и устойчивые распределения. Однако Маккаллох (McCulloch, 1985) указал, что устойчивый процесс "тем не менее, является предпочтительным в соответствии с критерием принципа Оккама, так как он обеспечивает и большие скачки, и непрерывное движение. В то же время, он более расчетлив с параметрами, чем спецификация Мертона. Устойчивый процесс фактически влечет за собой бесконечное число пуассоновских скачкообразных процессов, относительные частоты которых определяются характеристическим показателем α ."

Есть и еще одна оговорка. Вычисление стоимости опционов для устойчивых распределений является весьма сложным и требует обширных таблиц, размеры которых не соответствуют данной книге. (Они есть в работе Маккаллоха).

Часть 4. Фрактальный шум

Приводимый здесь пересказ работы Маккаллока призван дать некоторую основную информацию читателям, заинтересованным в вычислении "справедливой стоимости" с использованием устойчивых распределений. Учитывая, что статистическое распределение при условной волатильности может быть определено распределениями GARCH, вероятно, существуют более простые методы. Я заранее предупреждаю читателей, что приводимое здесь обсуждение не будет полным, и, возможно, они пожелают продолжить его изучение и исследование в дальнейшем. Те, кого не интересуют приводимые здесь подробности, могут их пропустить и перейти к Главе 16.

Подход Маккаллока

Маккаллок (McCulloch, 1985) сформулировал формулу опционного ценообразования, которая объясняла бы устойчивые распределения. Он сделал это, используя особое свойство устойчивых распределений. Помните, что переменная асимметрии β может варьироваться от -1 до +1. Когда она равна 0, распределение симметрично. Вся работа Фамэ и Ролла была выполнена, основываясь на предположении о симметричном случае. Тем не менее, когда $\beta = +1(-1)$, нижний (верхний) хвост теряет свою характеристику Парето и уменьшается быстрее нормального распределения. Противоположный хвост становится еще длиннее и толще, так что распределение напоминает "логарифмически нормальное" распределение – унимодальное (одновершинное) с длинным положительным (отрицательным) хвостом и коротким, конечным отрицательным (положительным) хвостом. Золотарев (Zolotarev, 1983) показал, что, когда устойчивая случайная переменная x имеет параметры $(\alpha, -1, c, \delta)$, характеристическая функция для $\alpha \neq 1$ представляет собой следующее:

$$\log(E(e^x)) = \delta * (-c)^{\alpha} * \sec\left(\frac{\pi * \alpha}{2}\right) \quad (15.7)$$

Маккаллок использовал это уравнение, чтобы вывести формулу для оценки европейских опционов с "логарифмически устойчивой неопределенностью". В данном разделе кратко излагается работа Маккаллока. Она соответствует фрактальной гипотезе рынка и показывает практическое применение фрактальной статистики. Эта работа является большой заслугой Маккаллока, поскольку она была написана до того, как появились общепринятые доказательства, что рынки описывались фрактальными распределениями.

Спот и форвардные цены

Мы начинаем с определения спот и форвардных цен в терминах устойчивых распределений. Производная ценная бумага A_2 будет стоить X в будущее время T в терминах спотовой ценной бумаги (spot security) A_1 . U_1 и U_2 представляют предельную полезность, или значение A_1 и A_2 , соответственно, для инвестора. Если $\log(U_1)$, и $\log(U_2)$ являются устойчивыми с общим характеристическим показателем, то:

$$\log(X) = \log(U_2/U_1) \quad (15.8)$$

15. Применение фрактальной статистики

также является устойчивым, с тем же самым характеристическим показателем, как обсуждалось в Главе 14.

Теперь мы должны исследовать форвардную цену F , которая делает инвестора безразличным к инвестированию в производную ценную бумагу A_2 или в ценную бумагу, лежащую в основе, A_1 :

$$F = \frac{E(U_2)}{E(U_1)} \quad (15.9)$$

Маккаллоу указал, что если $\log(U_1)$ и $\log(U_2)$ устойчивы с альфой менее 2,0, то оба логарифма должны также иметь параметр асимметрии β , равный -1 ; то есть они должны быть *максимально отрицательно асимметричными*. Это касается функций полезности, но сам X не должен быть столь ограничен. Бета может равняться чему угодно в пределах между -1 и $+1$.

Теперь мы возьмем два коэффициента, u_1 и u_2 , которые являются независимыми и определенными активами. u_1 имеет отрицательное воздействие на $\log(U_1)$; u_2 имеет отрицательное воздействие на $\log(U_2)$. Существует еще третий коэффициент, u_3 , который имеет отрицательное воздействие на *оба* логарифма $-\log(U_1)$ и $\log(U_2)$. u_1 устойчив и имеет параметры $(\alpha, +1, c_1, \delta_1)$. u_2 также устойчив и имеет параметры $(\alpha, +1, c_2, \delta_2)$. u_3 независим от u_1 и u_2 . Однако он также устойчив и имеет параметры $(\alpha, +1, c_3, \delta_3)$. Все три коэффициента максимально и положительно асимметричны, как показано их параметрами асимметрии, равными $+1$. Эти три коэффициента влияют на $\log(U_1)$ и $\log(U_2)$ следующим образом:

$$\log(U_1) = -u_1 - u_3 \quad (15.10)$$

$$\log(U_2) = -u_2 - u_3 \quad (15.11)$$

$$\log(X) = u_1 - u_2 \quad (15.12)$$

$\log(X)$ определяется параметрами $(\alpha, \beta, c, \delta)$. В этой формулировке предполагается, что α, β, c и F известны – большое предположение. Другие параметры неизвестны. Тем не менее, используя свойство аддитивности в уравнении (14.11), мы можем вывести следующие отношения:

$$\delta = \delta_1 - \delta_2, \alpha \neq 1 \quad (15.13)$$

$$c = c_1^\alpha + c_2^\alpha \quad (15.14)$$

$$\beta * c^\alpha = c_1^\alpha - c_2^\alpha \quad (15.15)$$

Складывая уравнение (15.14) и уравнение (15.15) и вычисляя c_1 , мы имеем:

$$c_1 = \left(\frac{1 + \beta}{2} \right)^{1/\alpha} * c \quad (15.16)$$

Аналогично, вычитая уравнение (15.15) из уравнения (15.14) и вычисляя c_2 , мы имеем:

$$c_2 = \left(\frac{1-\beta}{2} \right)^{1/\alpha} * c \quad (15.17)$$

Теперь мы можем использовать уравнение (15.7), которое упростило характеристическую функцию для устойчивых переменных, которые максимально и отрицательно асимметричны, таких как U_1 и U_2 :

$$E(\log(U_2)) = e^{-\delta_2 - \delta_3 - (c_2^\alpha + c_1^\alpha) * \sec(\pi * \alpha / 2)} \quad (15.18)$$

$$E(\log(U_1)) = e^{-\delta_1 - \delta_3 - (c_1^\alpha + c_2^\alpha) * \sec(\pi * \alpha / 2)} \quad (15.19)$$

Используя эти отношения в уравнении (15.9), теперь мы можем выразить значение форвардной цены F в терминах устойчивых параметров X :

$$F = e^{-\delta_1 - \delta_2 - (c_1^\alpha + c_2^\alpha) * \sec(\pi * \alpha / 2)} \quad (15.20)$$

Заключительное преобразование происходит из отношений в уравнениях (15.13) – (15.15).

Форвардная цена F выражается в терминах характеристического распределения X . Это уравнение форвардного курса теперь используется как форвардная цена ценной бумаги в опционном ценообразовании.

Опционное ценообразование

В соответствии с традицией, мы назовем цену европейского опциона колл C во времени 0. Опцион может быть безоговорочно исполнен во время T , для одной единицы (или доли) актива, который мы назовем A_2 . A_1 – валюта, которую мы используем, чтобы оплатить опцион. Безрисковой процентной ставкой на A_1 является r , срок которой также наступает во время T . Следовательно, единицы A_1 эквивалентны единицам $C * e^{r * T}$ во времени T . Цена исполнения опциона – X_0 . Если $X > X_0$ во времени T , владелец заплатит X_0 единиц A_1 , чтобы получить одну акцию A_2 , минус $C * e^{r * T}$, что было заплачено за опцион. Это включает цену опциона C и временную стоимость тех денег при наступлении срока.

Маккаллоу ввел формулу, которая приравнивает ожидаемое преимущество покупки или продажи опциона к 0. Это – уравнение безразличия:

$$0 = \int_{x > X_0} (U_2 - X_0 * U_1) dP(U_1, U_2) - C * e^{r * T} * \int_{all-x} U_1 dP(U_1, U_2) \quad (15.21)$$

Маккаллоу затем использовал уравнение (15.9) и вычислил C :

$$C = e^{-r * T} * \left[\frac{F}{E(U_2)} * \int_{x > X_0} U_2 dP(U_1, U_2) - \frac{X_0}{E(U_1)} * \int_{x > X_0} U_1 dP(U_1, U_2) \right] \quad (15.22)$$

$P(U_1, U_2)$ представляет совместное распределение вероятностей U_1 и U_2 .

Заключительным шагом является описание C в терминах семейства устойчивых распределений. Маккаллоу сделал это, определяя две функции, $s(z)$ и $S(z)$,

15. Применение фрактальной статистики

как являющиеся *стандартно* максимально и *положительно* асимметричными; то есть β равно +1, так что функции плотности и распределения определяются как $(\alpha, 1, 1, 0)$. Затем Маккаллок показал, что уравнение (15.22) может быть преобразовано в уравнение (15.23). Доказательство выходит за рамки возможностей данной книги. Заключительная форма C является следующей:

$$C = F * e^{-r_1 * T + c_2^\alpha * \sec(\pi * \alpha / 2)} * I_1 - X_0 * e^{-r_1 * T + c_1^\alpha * \sec(\pi * \alpha / 2)} * I_2 \quad (15.23)$$

где:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_2 * z} * s(z) * \left[1 - S \left(\frac{c_2 * z - \log \left(\frac{F}{X_0} \right) + \beta * c^\alpha * \sec(\pi * \alpha / 2)}{c_1} \right) \right] dz \quad (15.24)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1 * z} * s(z) * S \left(\frac{c_1 * z - \log \left(\frac{F}{X_0} \right) + \beta * c^\alpha * \sec(\pi * \alpha / 2)}{c_2} \right) dz \quad (15.25)$$

Уравнения (15.16) и (15.17) показывают, как определить c_1 и c_2 . Остаток формулы показывает, что цена опциона – функция трех значений и трех устойчивых параметров; то есть цена зависит от (1) форвардной цены (F), (2) цены исполнения (X_0) и (3) текущей безрисковой ставки (r_1). Кроме того, она зависит от a , b и значений распределения X . δ содержится в F , и "общий компонент неопределенности" u_3 выпадает.

Формула Блэка-Шоулса была сложной, но ее можно было понять в терминах простого арбитражного аргумента. Формула Маккаллока имеет схожий арбитражный аргумент, но сама формула кажется еще более сложной, чем ее предшественник. Она также кажется менее точной. Формула Блэка-Шоулса определяла цену досрочного выкупа, на основании соотношения между курсом акций и ценой исполнения; формула Маккаллока определяет ее на основании соотношения между форвардной ценой и ценой исполнения. Маккаллок знал об этой проблеме и заявил: "Если форвардный курс F по какой-либо причине не наблюдается, мы можем использовать цену спот S для его замены, если мы знаем безрисковую процентную ставку без r_2 на A_2 деноминированных займов, так как арбитраж требует:

$$F = S * e^{(r_1 - r_2) * T} \quad (15.26)$$

Нормальное распределение больше не используется. Вместо него используются устойчивые распределения s и S . Дисперсия, аналогичным образом, заменяется на c .

Формула для цены опциона пут подобна производной Блэка-Шоулса:

$$P = C + (X_0 - F) * e^{-r * T} \quad (15.27)$$

Это опять является европейским опционом пут, который дает держателю право, но не обязательство, продать 1 единицу A_2 по цене исполнения X_0 .

Коэффициент псевдохеджирования

Маккаллоу определил коэффициент хеджирования, но задал ему важные ограничительные условия. Прежде всего, фрактальные системы, как мы обсуждали, подвержены разрывам в проекции прямой времени. Это делает арбитражную логику Блэка и Шоулса (Black and Scholes, 1973) бесполезной в самых тяжелых ситуациях (большие события, которые вызывают толстые хвосты), когда хеджер в ней больше всего нуждается. Эта несостоятельность подхода Блэка-Шоулса привела к тому, что стратегия, названная "портфельное страхование", обеспечила только частичную защиту во время краха 1987 г.

Маккаллоу действительно предложил коэффициент псевдохеджирования. По существу, риск продажи опциона колл (writing a call option) может быть *частично* застрахован, если занять долгосрочную позицию на базовом активе. Необходимые единицы выведены в следующем уравнении:

$$\frac{\partial(C * e^{r * T})}{\partial F} = e^{c^2 * \sec(\alpha * \pi / 2)} * I_1 \quad (15.28)$$

Тем не менее, поскольку не существует средства от разрывов в проекции прямой времени рыночных прибылей, "совершенный" хедж во фрактальной среде невозможен. Это всегда будет несовершенный хедж.

Численные значения опциона

Маккаллоу вычислил несколько значений опциона в качестве примеров. Он использовал следующий аргумент для вычисления значений опциона из стандартных таблиц, таких как таблицы в Приложении 3.

Предположим, что нас интересует опцион колл на 1 единицу A_2 по цене исполнения X_0 , как мы определяли эту проблему в данной главе. Мы определяем $C(X_0, F, \alpha, \beta, c, r, T)$ как цену досрочного выкупа. Это может быть записано следующим образом:

$$C(X_0, F, \alpha, \beta, c, r, T) = e^{r * T} * F * C\left(\frac{X_0}{F}, \alpha, \beta, c\right) \quad (15.29)$$

где:

$$C\left(\frac{X_0}{F}, \alpha, \beta, c\right) = C\left(\frac{X_0}{F}, 1, \alpha, \beta, c, 0, 1\right) \quad (15.30)$$

Схожее преобразование может быть выполнено для цены исполнения опциона

15. Применение фрактальной статистики

пут P и P' . Кроме того, используя уравнение (15.27), мы можем вычислить P' от C' :

$$P\left(\frac{X_0}{F}, \alpha, \beta, c\right) = C'\left(\frac{X_0}{F}, \alpha, \beta, c\right) + \frac{X_0}{F} - 1 \quad (15.31)$$

Опцион пут на 1 долю A_2 по цене X_0 эквивалентен опциону пут на X_0 акций A_1 по цене исполнения $1/X_0$. Значение последнего опциона в единицах A_2 составляет:

$$X_0 * P\left(\frac{1}{X_0}, \frac{1}{F}, \alpha, -\beta, c, r_2, T\right)$$

потому что форвардная цена составляет $1/F$ единиц A_2 .

$\text{Log}(1/x) = -\text{log}(x)$, а также имеет параметры α , $-\beta$, c . Это может быть переформулировано как:

$$C(X_0, F, \alpha, \beta, c, r_1, T) = S\left[X_0 * P\left(\frac{1}{X_0}, \frac{1}{F}, \alpha, -\beta, c, r_2, T\right)\right] \quad (15.32)$$

На основе использования уравнения (15.26) это может быть сформулировано следующим образом:

$$C'\left(\frac{X_0}{F}, \alpha, \beta, c\right) \frac{X_0}{F} * C'\left(\frac{F}{X_0}, \alpha, -\beta, c\right) + 1 - \frac{X_0}{F} \quad (15.33)$$

Следовательно, цены опционов для комбинации различных коэффициентов могут быть рассчитаны на основе таблиц

$$C'\left(\frac{X_0}{F}, \alpha, \beta, c\right) \text{ для } \frac{X_0}{F} \geq 1.$$

В таблицах 15.2 и 15.3 мы воспроизводим две таблицы Маккаллока. Значения показаны для 100 опционов, оцененных в C' ($X_0/F, \alpha, \beta, c$). Таблицы показывают значение в количествах A_1 для 100 акций или единиц A_2 . Если опцион на IBM (A_2), подлежащий оплате в долларах (A_1), таблица показывает значение стоимости, в долларах, для опциона IBM на 100\$ стоимости IBM.

В таблице 15.2 $C = 0.1$, а $X_0/F = 1.0$. Поскольку X_0 – цена исполнения, а F – форвардная цена, опцион имеет нулевую внутреннюю стоимость. α и β могут изменяться. Уменьшение α приводит к повышению цены опциона, поскольку устойчивые распределения имеют более высокий пик в среднем, и, следовательно, более вероятно, что они, а не нормальное распределение, будут иметь нулевую внутреннюю стоимость. Когда $\alpha = 2.0$, бета не оказывает никакого влияния. Однако для других значений беты цена повышается вместе с асимметрией.

В таблице 15.3, также воспроизведенной из работы Маккаллока (McCulloch, 1985), альфа и бета считаются постоянными и равными 1,5 и 0,0 соответственно; вместо них изменяются X_0/f . Как и следовало ожидать, увеличение (которое эквивалентно увеличению волатильности в формуле Блэка-Шоулса) приводит к

Часть 4. Фрактальный шум

увеличению значений опциона. То же самое верно в отношении опциона, который имеет все более и более положительную внутреннюю стоимость.

Таблица 15.2 Фрактальные цены опционов: $c = 0,1$, $X_0/F = 1,0$

Альфа	Бета (β)				
	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0
2,0	5,637	5,637	5,637	5,637	5,637
1,8	6,029	5,993	5,981	5,993	6,029
1,6	6,670	6,523	6,469	6,523	6,670
1,4	7,648	7,300	7,157	7,300	7,648
1,2	9,115	8,455	8,137	8,455	9,115
1,0	11,319	10,200	9,558	10,200	11,319
0,8	14,685	12,893	11,666	12,893	14,685

Таблица 15.3 Фрактальные цены опционов: $\alpha = 1,5$, $\beta = 0,0$

	X_0/F			
	0,5	1,0	1,1	2,0
0,01	50,007	0,787	0,079	0,014
0,03	50,038	2,240	0,458	0,074
0,10	50,240	6,784	3,466	0,481
0,30	51,704	17,694	14,064	3,408
1,00	64,131	45,642	43,065	28,262

Заключение

В начале этого раздела я говорил, что фрактальное опционное ценообразование является достаточно сложным и требует всестороннего изучения. Неочевидно, что сложная методология, используемая здесь, необходима, но она, безусловно, стоит повторного рассмотрения. Огромные суммы денег направляются на рынки опционов, и знание формы исходного распределения должно приносить прибыль. Оно должно, по крайней мере, дать передышку тем, кто использует традиционный коэффициент хеджирования и ожидает, что он даст им "совершенный хедж". В этой главе мы видели, что он не может существовать.

ВЫВОДЫ

В данной главе была рассмотрена более ранняя работа, которая использовала устойчивые распределения в двух традиционных областях количественной финансовой экономики. Первой областью был выбор портфеля. Фамэ и Самуэльсон независимо разработали вариант рыночной модели Шарпа, который предусматривал

15. Применение фрактальной статистики

эффективный выбор портфеля во фрактальной среде. В отношении этой работы есть ограничения: характеристический показатель α должен был быть одинаковым для всех ценных бумаг в портфеле. Акции, как оказывается, имеют различные значения показателя Херста и, следовательно, различные значения α . Дальнейшая работа в этой области была бы очень полезна.

Второй областью, которую мы исследовали, было выведение Маккаллоком модели опционного ценообразования для устойчивых распределений. Эта модель кажется правильной, но она исключительно сложна, как и большинство объектов в реальном мире. Читателю предлагается самому решить, будет ли этот уровень сложности полезным для дальнейшего изучения.

ЧАСТЬ 5

ШУМОВОЙ ХАОС

16

Шумовой хаос и R/S-анализ

В Части 4 мы исследовали дробное броуновское движение (FBM) как возможную модель для рыночных прибылей. FBM имеет ряд важных характеристик, которые соответствуют гипотезе фрактального рынка. Среди них – статистическое самоподобие с течением времени и персистентность, которая создает тренды и циклы. Статистическое самоподобие соответствует наблюдаемому частотному распределению прибылей, исследованному в Главе 2. Мы видели, что они схожи по форме в различных масштабах времени. Персистентность согласуется с идеей, что на различных инвестиционных горизонтах информация поглощается неравномерно. Наконец, тот факт, что, как оказывается, рыночные прибыли являются черным шумом, в то время как волатильность является розовым шумом, согласуется с теоретической взаимосвязью между этими двумя цветными шумами.

FBM не совместимо с одним аспектом рынков, таких как рынок акций и облигаций. Долгосрочные инвестиции никак не вознаграждаются. Мы видели в Главе 2, что акции и облигации характеризуются возрастающими соотношениями доходность/риск через четыре года. FBM, с другой стороны, не имеет ограниченных характеристик риска; то есть временная структура волатильности, теоретически, не прекращает расти.

Кроме того, не существует связи с экономикой или другими детерминированными механизмами. Статистическая теория более заинтересована описанием рисков, чем анализом механизмов. На Рисунке 16.1 показан индекс S&P 500 против различных экономических показателей в течение периода с января 1957 г. по апрель 1993 г. Визуально мы можем видеть связь и разумно было бы полагать, что в долгосрочной перспективе связь должна быть.

Связь с экономикой все еще имеет отношение к ожиданиям инвестора, но эти ожидания больше связаны с фундаментальными коэффициентами, чем с поведением толпы. Таким образом, мы должны ожидать, что по мере удлинения инвестиционных горизонтов, фундаментальная и экономическая информация должны оказывать больше влияния, чем технические коэффициенты. Интерпретация экономической информации инвестором неизбежно будет нелинейной.

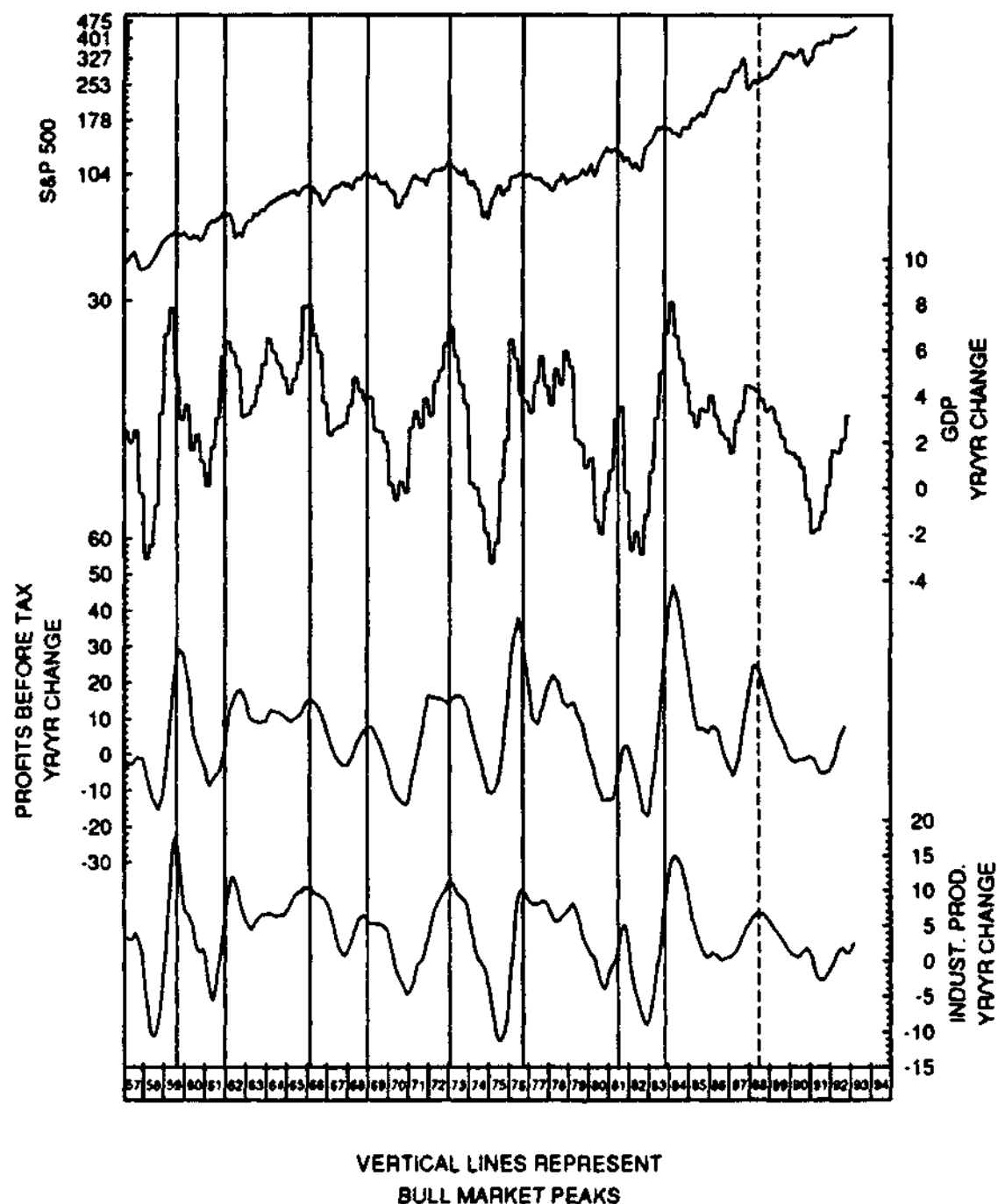


РИСУНОК 16.1 Фондовая биржа и пиковые показатели экономического роста.

ИНФОРМАЦИЯ И ИНВЕСТОРЫ

Существовало много различных моделей поглощения информации инвесторами. Самые простые версии предполагают мгновенную, однородную интерпретацию информации на всех инвестиционных горизонтах. Это всегда приводит к "справедливой" цене и является основным принципом гипотезы эффективного рынка (ЕМН). Чтобы объяснить разрывы в структуре ценообразования, а также толстые хвосты, Миллер (Miller, 1991) и Шиллер (Shiller, 1989) предположили, что информация поступает "комковатым", прерывистым образом. Инвесторы все еще

реагируют на информацию однородно, но поступление информации прерывисто. Эта теория сохраняет предположение о независимости, которое столь важно для ЕМН, но признает, что форма частотного распределения прибыли и разрывы в структуре ценообразования слишком серьезны, чтобы их можно было отклонить как выбросы. И все же, обе теории игнорируют один факт: люди не принимают решения таким образом.

Как мы видели в Главе 4, определенная порция информации не обязательно важна для инвесторов на каждом инвестиционном горизонте. Когда важная порция информации имеет очевидные последствия, рынок может вынести быстрое суждение, и часто так и происходит. Недавним примером было объявление компанией "Филипп Моррис" о снижении цены на ее сигареты "Мальборо". Большинство аналитиков сразу знало, как это повлияет на доходы. При открытии биржи цена соответствовала тому уровню (50 долларов за акцию) и позднее осталась в пределах того же уровня.

Другую информацию не так легко оценить, особенно если данные являются шумными. Шум может быть вызван либо волатильностью в определенном показателе по структурным причинам, либо проблемами измерения. Оба фактора способствуют тому, что рынок неспособен однородно оценивать информацию.

Существует и другая возможность: новая информация может способствовать повышению неуверенности, а не увеличению знания. Вообще, экономисты считают новую информацию позитивным проявлением. Новая информация увеличивает знание о текущих условиях и облегчает суждение о будущем. Наше увеличившееся знание приводит к более справедливым ценам на ценные бумаги. Однако также существует информация, которая увеличивает неуверенность, опровергая то, что, по нашему мнению, мы уже знали. Согласно теории арбитражного ценообразования она представляет собой неожиданные изменения переменной, но влияние этих неожиданных изменений не принимается во внимание. Например, предположим, что происходит неожиданный рост инфляции. Если рост является достаточно большим, неуверенность о статусе инфляции увеличивается. Она снова возрастет или нет? Предположим, что рост денежной массы в этот момент упал. Неожиданный рост инфляции может, фактически, иметь эффект опровержения значения предыдущей информации, которая считалась значимой. Это повышение неуверенности с появлением новой информации может, фактически, привести к увеличению неуверенности об уровне "справедливой" цены, а не к автоматическому объединению цены. Мы можем получить повышенную волатильность, или просто шумное дрожание. Этот вид шума, вероятно, происходит наиболее часто на высоких частотах, где рынок пробует выяснить значение информации одновременно с ее поступлением.

Проблема шума не проста. Ошибка измерения не является единственным источником шума. Он может быть частью самой системы. Возможны оба типа шума.

Измерительный шум (также называемый наблюдаемым шумом) представляет собой намного более распространенную проблему для экономических данных. Измерение экономической деятельности – неточная наука, и проблемы сбора данных делают ее еще более неточной. В результате мы часто не знаем о том, что спад закончился или начался в течение многих месяцев, а иногда и лет после того, как это

Часть 5. Шумовой хаос

произошло. В декабре 1992 г. Министерство торговли США объявило, что последний спад закончился в апреле 1991 г., то есть приблизительно 18 месяцев назад. Большинство чисел часто пересматриваются, что увеличивает неуверенность в значении данных. Этот измерительный шум сопоставим с наблюдаемым шумом, который мы обсуждали в Главе 4.

Второй тип шума происходит, когда сам показатель изменчив. Один из наиболее широко используемых экономических показателей – товарные цены, которые используются для различения трендов инфляции цен. Сами товарные цены подвержены своим собственным рыночным колебаниям. Часто при анализе индекса потребительских цен (Consumer Price Index – CPI) исключается компонент "волатильного продовольствия и энергии". Получающиеся в результате менее волатильные данные об инфляции называют "стержневым темпом". Но даже в этом случае изменение CPI может интерпретироваться по-разному. Если не понимать, что тренд изменился, может казаться, что рынки реагируют на недавние тренды CPI и схожих волатильных показателей, а не на опубликованные ежемесячные изменения. Тот факт, что тренд изменился, воспринимается только после того, как после изменения прошло некоторое время. Например, если в течение длительного периода инфляция была низкой, неожиданное повышение темпа инфляции обычно будет объясняться как особый случай, а не изменение тренда. Однако если инфляция продолжает расти, и воспринимается изменение тренда, рынки будут реагировать на все изменения инфляции, которые они до того игнорировали. Это нелинейная реакция. Волатильность CPI является признаком другого типа шума, обычно называемого *системным* шумом или динамическим шумом.

На более длинных частотах рынок реагирует на экономическую и фундаментальную информацию нелинейным образом. Кроме того, предположение о том, что рынки и экономика должны быть связаны, не является неразумным. Это подразумевает, что нелинейная динамическая система была бы подходящим способом моделирования взаимодействия, удовлетворяющим тот аспект гипотезы фрактального рынка, который остался нерешенным с помощью дробного броуновского движения. Нелинейные динамические системы прибегают к неперiodическим циклам и ограниченным множествам, называемым аттракторами. Сами системы подпадают под классификацию хаотических систем. Тем не менее, для того чтобы называться хаотическими, они должны отвечать очень специфическим требованиям.

ХАОС

Хаотические системы обычно являются нелинейными системами с обратной связью. Они подвержены беспорядочному поведению, усилению событий и разрывам. Для того чтобы система считалась хаотичной, должны выполняться два требования: (1) существование фрактальной размерности и (2) характеристика, называемая *чувствительной зависимостью от начальных условий*. Более полное обсуждение этих характеристик приводилось в моей предыдущей книге, но было бы целесообразно провести основной обзор, поскольку дробный шум и шумовой хаос трудно отличить друг от друга, особенно при исследовании эмпирических данных.

Однако, как мы увидим, R/S-анализ – очень устойчивый способ для их различения. Кроме того, нахождение хаоса в экспериментальных данных было очень разочаровывающим. Большинство методов не подходят для шума. R/S-анализ, напротив, не только подходит для шума, но и процветает с шумом. R/S-анализ был бы полезным дополнением к комплексу инструментов не только рыночного аналитика, но и ученого, изучающего хаотические явления.

Фазовое пространство

Хаотическая система анализируется в месте, которое называется фазовым пространством и состоит из одного измерения для каждого фактора, определяющего систему. Маятник является простым примером динамической системы с двумя факторами, которые определяют его движение: (1) скорость и (2) положение. Вычерчивание кривой скорости или положения против времени привело бы к простой синусоидальной волне, или гармоническому осциллятору, поскольку положение и скорость поднимаются и падают по мере того, как маятник движется вперед и назад, поднимаясь и падая. Однако когда мы вычерчиваем кривую скорости против положения, мы удаляем время как измерение. Если нет трения, маятник будет качаться назад и вперед вечно, и его фазовая диаграмма будет представлять собой замкнутый круг. Однако если имеет место трение или затухание, то при каждом колебании маятника назад и вперед, он движется немного медленнее, и его амплитуда уменьшается, пока он, в конце концов, не останавливается. Соответствующая фазовая диаграмма будет постепенно снижаться до начала координат, где скорость и положение приходят к нулевому значению.

Фазовое пространство маятника говорит нам все, что мы должны знать о динамике системы, но маятник – не очень интересная система. Если мы возьмем более сложный процесс и изучим его фазовое пространство, мы обнаружим ряд интересных характеристик.

Мы уже исследовали одно такое фазовое пространство, аттрактор Лоренца (Глава 6). Здесь фазовая диаграмма никогда не повторяется, хотя она ограничена формой "глаза совы". Они "притягиваются" к этой форме, которую часто называют ее "точкой притяжения (аттрактором)". Если мы исследуем линии в пределах аттрактора, мы находим самоподобную структуру линий, вызванную повторным сворачиванием аттрактора. Непересекающаяся структура линий означает, что процесс никогда не заполнит свое пространство полностью. Его размерность, таким образом, является дробной. Фрактальная размерность аттрактора Лоренца составляет приблизительно 2,08. Это означает, что его структура немного больше, чем двумерная плоскость, но меньше чем трехмерное тело. Следовательно, он также является созданием Демиурга.

Кроме того, сам аттрактор ограничен определенной областью пространства, поскольку хаотические системы характеризуются фактором роста и убывания. Каждый оборот вокруг аттрактора называют орбитой. Две орбиты, которые первоначально находятся на близком расстоянии друг от друга, будут быстро расходиться, даже если они чрезвычайно близки в начале. Но они не будут отдаляться друг от друга бесконечно. В конечном счете, когда каждая орбита достигает внешней

Часть 5. Шумовой хаос

границы аттрактора, она возвращается к центру. Расходящиеся точки снова сблизятся, хотя для этого может понадобиться много орбит. Это явление – свойство чувствительной зависимости от начальных условий. Поскольку мы никогда не можем измерить текущие условия с бесконечным количеством точности, мы не можем предсказать, куда пойдет процесс в долгосрочной перспективе. Степень расхождения или потеря прогнозирующей способности может быть охарактеризована посредством измерения расхождения близлежащих орбит в фазовом пространстве. Степень расхождения (называемая "показателем Ляпунова") измерена для каждого измерения в фазовом пространстве. Одна положительная степень означает, что есть расходящиеся орбиты. Вместе с фрактальной размерностью это означает, что система является хаотической. Кроме того, должен быть отрицательный показатель для измерения процесса сворачивания или возвращения к аттрактору. Формула для показателей Ляпунова такова:

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} [(1/t) * \log_2(p_i(t)/p_i(0))] \quad (16.1)$$

где L_i = показатель Ляпунова для размерности i

$p_i(t)$ = положение в i -ой размерности, во времени t

Уравнение (16.1) измеряет, как объем сферы растет со временем t посредством измерения расхождения двух точек, $p(t)$ и $p(0)$, в размерности i . Расстояние подобно многомерному диапазону. Исследуя уравнение (16.1), мы можем видеть некоторое сходство с R/S-анализом и с вычислением фрактальной размерности. Все они связаны с масштабированием. Однако хаотические аттракторы имеют орбиты, которые убывают по экспоненте, а не в соответствии со степенными законами.

ПРИМЕНЕНИЕ R/S-АНАЛИЗА

Когда мы кратко изучали аттрактор Макки и Гласса (Mackey and Glass, 1988) в Главе 6, мы были заинтересованы обнаружением циклов. В этой главе мы расширим это исследование и увидим, как R/S-анализ может различать шумовой хаос и дробный шум.

Показатель шума

В Главе 6 мы не раскрыли значение показателя Херста. Для Рисунка 6.8 $H=0,92$. Как следовало бы ожидать, непрерывный, гладкий характер хаотического потока способствует очень высокому показателю Херста. Он не равен 1 из-за механизма сворачивания или инверсий, которые часто происходят в проекции прямой времени этого уравнения. На Рисунке 6.11 мы прибавили к системе одно стандартное отклонение белого, однородного шума. Это понизило показатель Херста до 0,72 и проиллюстрировало первое применение R/S-анализа к шумовому хаосу: использование показателя Херста как показателя шума.

Предположим, что вы – технический аналитик, который хочет проверить определенный тип ежемесячного показателя момента, и для проверки показателя вы планируете использовать уравнение Макки-Гласса. Вы знаете, что показатель Херста

для ежемесячных данных имеет значение 0,72. Чтобы сделать моделирование реалистическим, к данным необходимо добавить одно стандартное отклонение шума. Таким образом, вы можете увидеть, является ли ваш технический показатель устойчивым относительно шума.

Теперь предположим, что вы – ученый, исследующий хаотическое поведение. У вас есть особый тест, который может отличить хаос от случайного поведения. Чтобы сделать этот тест практическим, вы должны показать, что он является устойчивым относительно шума. Поскольку большинство наблюдаемых временных рядов имеет значения H близкие к 0,70 (как нашел Херст; см. Таблицу 5.1), вам понадобится достаточное количество шума, чтобы ваш испытательный ряд имел $H=0,70$. Или же вы можете постепенно добавлять шум и наблюдать уровень H , на котором ваш тест становится недостоверным.

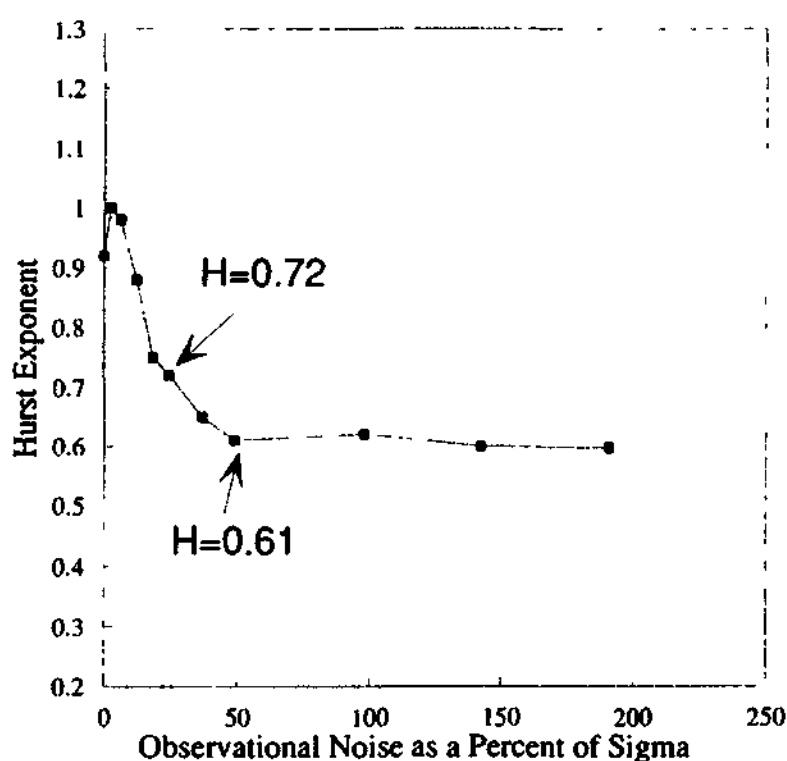


РИСУНОК 16.2 Уравнение Макки-Гласса, чувствительность показателя Херста к шуму.

На Рисунке 16.2 показаны значения H по мере добавления возрастающего шума к уравнению Макки-Гласса. Показатель Херста быстро понижается до 0,70, а затем постепенно падает до 0,60. Однако после добавления двух стандартных отклонений шума, H все еще приблизительно составляет 0,60. Это означает, что частые значения $H=0,70$, что так интриговало Херста (Hurst, 1951), возможно, обусловлены тем фактом, что добавление шума к нелинейной динамической системе быстро заставляет значение H упасть до 0,70. С другой стороны, данные H ниже 0,65, которые обнаруживаются на рынках, вероятно, не вызваны просто добавлением измерительного или аддитивного шума к хаотическому аттрактору, но могут, вместо этого, быть вызваны дробным шумом. Эта возможность также подтверждает идею о том, что в краткосрочной перспективе рынки представляют собой дробный шум, а в

долгосрочной перспективе – шумовой хаос.

Системный шум

Помимо аддитивного шума, который мы исследовали, есть другой тип шума, называемый "системным шумом". Системный шум имеет место, когда результат итеративной системы искажен шумом, но система не может отличить шумный сигнал от чистого и использует шумный сигнал как входные данные для следующей итерации. Этот вид шума весьма отличается от наблюдаемого шума, который происходит вследствие того, что у наблюдателя возникают трудности при измерении процесса. Процесс продолжается, не обращая внимания на нашу проблему. Однако что касается системного шума, шум вторгается в саму систему. Из-за чувствительной зависимости от начальных условий системный шум увеличивает проблему прогнозирования.

На рынках, вероятнее всего, представлять проблему будет системный шум, а не наблюдаемый шум. Представьте следующую ситуацию: для нас не составляет трудности узнать стоимость последней торговой сделки, но мы не знаем, была ли это справедливая цена или нет. Возможно, продавец был в отчаянии и должен был осуществить продажу по любой цене, чтобы соблюсти предписываемую маржу. Мы реагируем на этот "шумный" результат, не зная его истинное значение. Если задействован системный шум, то прогнозирование становится более трудным, и испытания должны быть скорректированы соответствующим образом.

Воздействие системного шума на показатель Херста подобно воздействию аддитивного шума и показано на Рисунке 16.3.

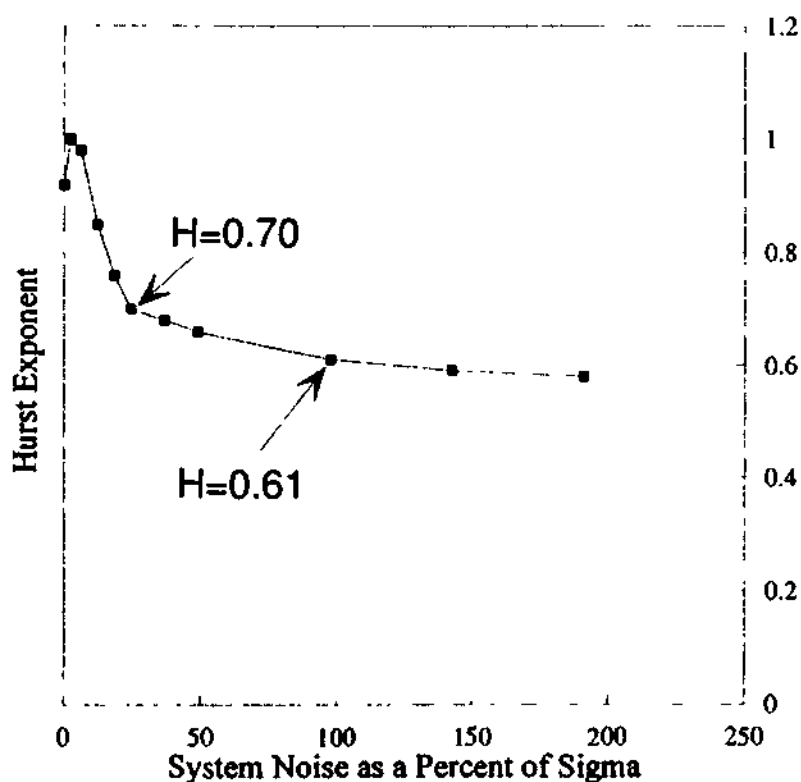


РИСУНОК 16.3 Уравнение Макки-Гласса, чувствительность показателя Херста к шуму.

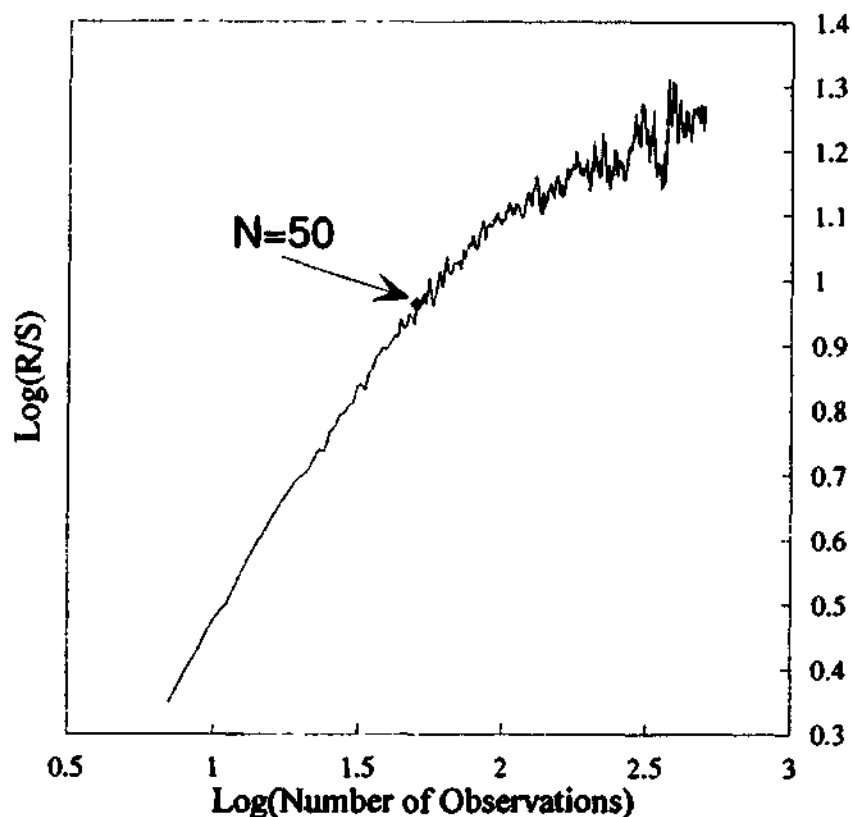


РИСУНОК 16.4 R/S-анализ, уравнение Макки-Гласса с системным шумом.

Циклы

Мы уже обсуждали в Главе 6, как R/S-анализ может различить цикл даже в присутствии одного стандартного отклонения наблюдаемого шума. На Рисунке 16.4 показан R/S-анализ уравнения Макки-Гласса с одним включенным стандартным отклонением системного шума. Показатель Херста фактически идентичен ($H = 0,72$), и все еще различимы 50 циклов наблюдений.

V-статистика показана на Рисунке 16.5, где цикл снова является легко различимым.

Что означает тот факт, что наклон графика в логарифмическом масштабе по обеим осям переходит к случайному блужданию? Есть два возможных объяснения:

1. Процесс может быть дробным броуновским движением с длинной, но конечной памятью. Причинного объяснения конечной памяти не существует, но она может являться функцией ряда наблюдений. Масштабирование часто останавливается, поскольку для больших значений n не существует достаточного количества наблюдений.
2. Система является шумной хаотической системой и длина конечной памяти измеряет сворачивание аттрактора. Расхождение близлежащих орбит в фазовом пространстве означает, что они становятся некоррелированными после периода обращения (Волф, Свифт, Свини и Вастано (Wolf, Swift, Sweeney, & Vastano, 1985)). Поэтому процесс памяти прекращается после орбитального

Часть 5. Шумовой хаос

цикла. По существу, длина конечной памяти становится отрезком времени, который требуется системе, чтобы забыть ее начальные условия.

С графической точки зрения, когда система проходит через орбиту, она движется по длине аттрактора. Как только она проходит длину аттрактора, диапазон не может больше расти, поскольку аттрактор представляет собой ограниченное множество. Процесс дробного шума не является ограниченным множеством, так что диапазон не прекратит расти. Эта физическая характеристика аттракторов также подходит к характеристикам нормированного размаха.

Оба объяснения вероятны, особенно когда мы используем короткие наборы данных. Как нам решить, что есть что?

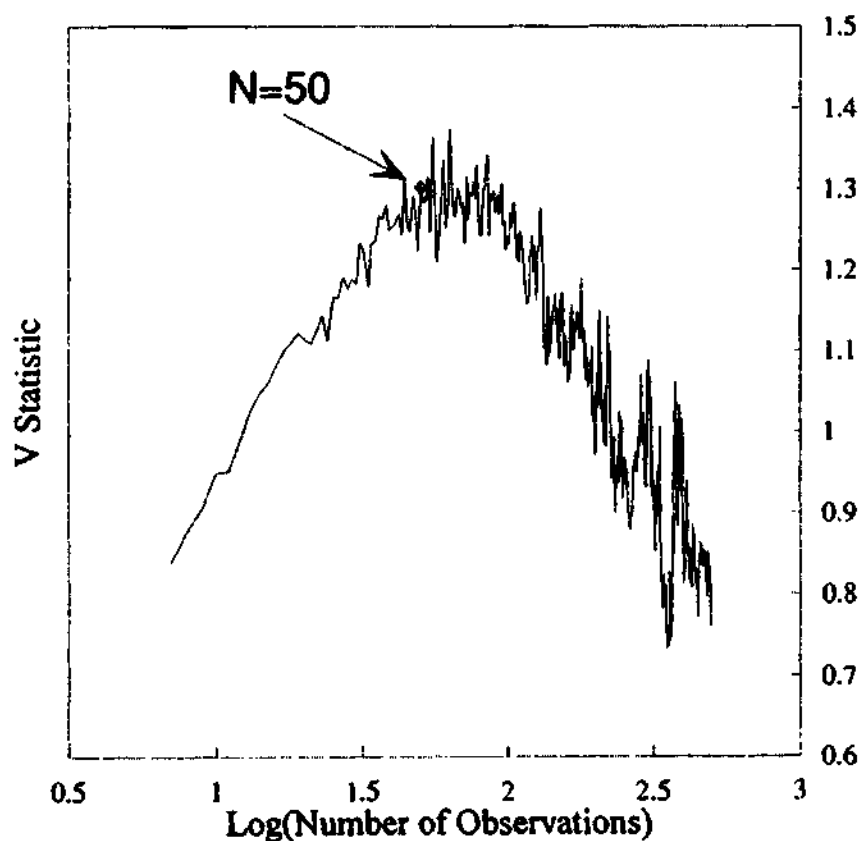


РИСУНОК 16.5 V-статистика, уравнение Макки-Гласса с системным шумом.

РАЗЛИЧИЕ ШУМОВОГО ХАОСА И ДРОБНОГО ШУМА

Самый прямой подход состоит в том, чтобы симитировать анализ индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний, проведенный в Главе 8. Если разрыв в графике в логарифмическом масштабе по обеим осям действительно представляет собой цикл, а не статистический артефакт, он должен быть независим от приращения времени, используемого в R/S-анализе. Для данных индекса Доу-Джонса цикл всегда составлял 1 040 операционных дней. Когда мы двигались от пятидневных к 20-дневным приращениям, цикл двигался от 208 пятидневных периодов к 52 20-дневным периодам. Если цикл не зависит от объема выборки, мы можем быть достаточно уверены, что мы исследуем шумовой хаос, а не дробный шум. Что касается данных

индекса Доу-Джонса, уменьшение размера набора данных на 75 процентов (настолько, насколько задействовано число наблюдений) не затрагивало длину памяти. Это является убедительным доказательством того, что мы измеряем свертку в фазовом пространстве, а не статистический артефакт.

Если в начале мы сталкиваемся с маленьким набором данных, это представляет для нас проблему. Мы можем использовать оценку длины цикла как один из компонентов подтверждающего доказательства, но сама по себе она не является решающей. Например, предположим, что мы используем R/S-анализ на наборе данных из 500 наблюдений. Мы находим значимый показатель Херста ($0,50 < H < 1,0$) и длину цикла в 50 наблюдений. Это подразумевает, что мы имеем десять циклов наблюдений, при этом каждый цикл состоит из 50 наблюдений. Согласно Волфу и др. (Wolf et al., 1985), такое количество данных является адекватным для оценки наибольшего показателя Ляпунова. Используя метод, описанный Волфом и др., а также Петерсом (Peters, 1991a), мы вычисляем оценку наибольшего показателя Ляпунова. Если этот показатель положителен, у нас есть хорошее основание, чтобы сделать вывод о том, что процесс является хаотическим. Если инверсия наибольшего показателя Ляпунова приблизительно равна длине цикла (как предположил Чен (Chen, 1987)), мы можем быть еще более уверены.

Те из вас, кто знаком с моими более ранними исследованиями индекса S&P 500 (Peters, 1991a, 1991b), вспомнят, что это было моим критерием для того, чтобы прийти к выводу, что индекс S&P 500, в долгосрочной перспективе, хаотичен, как предполагалось в гипотезе фрактального рынка. Результаты спорны, но я полагаю, что выводы, сделанные на основе независимых испытаний, обоснованны.

BDS-тест

Три экономиста, Брок, Дечерт и Шейнкман (Brock, Dechert, and Scheinkman, 1987), разработали дополнительное испытание – "BDS-тест" – которое широко используется учеными. BDS-статистика, вариант корреляционной размерности, в основном измеряет статистическую значимость вычислений корреляционной размерности. Это действенное испытание, позволяющее отличить случайные системы от детерминированного хаоса или от нелинейных стохастических систем. Однако оно не может различить нелинейную детерминированную систему и нелинейную стохастическую систему. По существу, оно находит нелинейную зависимость. При совместном использовании с другими испытаниями на хаос, а также с R/S-анализом, оно может быть очень полезным.

Согласно BDS-тесту корреляционные интегралы должны быть нормально распределенными, если изучаемая система независима, очень подобно распределению N , которое мы обсуждали в Главе 5.

Корреляционный интеграл – вероятность того, что любые две точки находятся на определенном расстоянии ϵ друг от друга в фазовом пространстве. По мере того как мы увеличиваем ϵ , вероятность изменяется согласно фрактальной размерности фазового пространства. Корреляционные интегралы рассчитываются согласно следующему уравнению:

$$C_m(e) = (1/N^2) * \sum_{i,j=1}^T Z(e - |X_i - X_j|), i \neq j \quad (16.2)$$

где $Z(x) = 1$, если $e - |X_i - X_j| > 0$; иначе 0

T = число наблюдений

e = расстояние

C_m = корреляционный интеграл для размерности m

Функция Z рассчитывает, сколько точек находится на расстоянии e друг друга. Согласно теории, C_m должно увеличиваться со скоростью e^D , где D – корреляционная размерность фазового пространства, которая близко связана с фрактальной размерностью. Вычисление корреляции требует от нас знания того, как выглядит фазовое пространство. В реальной жизни мы не только не знаем факторы, задействованные в системе, мы даже не знаем, сколько их! Обычно у нас есть только одна наблюдаемая величина, например, изменения курса акций. К счастью, в теореме Такенса (Takens, 1981) говорится, что мы можем воссоздать фазовое пространство, задерживая один временной ряд, который мы имеем, для каждой размерности, которая, как мы думаем, существует. Если число "размерностей вложения" больше, чем фрактальная размерность, корреляционная размерность стабилизируется к одному значению. В моей предыдущей книге намечены процедуры выполнения этого вычисления на основании экспериментальных данных, взятых из работы Волфа и др. (Wolf et al., 1985).

BDS-статистика базируется на статистических свойствах корреляционного интеграла. Большая часть нижеследующего обсуждения взята из работы Хсие (Hsieh, 1989), где можно найти более математическое рассмотрение BDS-статистики.

Корреляционный интеграл из уравнения (16.2) вычисляет вероятность того, что две точки, которые являются частью двух различных траекторий в фазовом пространстве, отстоят друг от друга на e единиц. Предположим, что X_i во временном ряде X (с наблюдениями T) независимы. Мы задерживаем этот ряд в "историях N "; то есть мы используем метод задержки времени Такенса для создания фазового пространства размерности N из временного ряда X . Затем мы вычисляем корреляционный интеграл $C_N(e, T)$, используя уравнение (16.2). Брок и др. показали, что по мере приближения T к бесконечности:

$$C_N(e, T) \Rightarrow C_1(e)^N \quad \text{со 100\% вероятностью} \quad (16.3)$$

Это типичная особенность масштабирования вероятностных процессов. Корреляционный интеграл просто заполняет пространство любой размерности, в которое он помещен. Брок и др. показали, что $|C_N(e, T) - C_1(e, T)^N| * \sqrt{T}$ является нормально распределенным со средним 0. BDS-статистика, w , которая следует, также является нормально распределенной:

$$W_N(e, T) = |C_N(e, T) - C_1(e, T)^N| * \sqrt{T} / s_N(e, T) \quad (16.4)$$

где $s_N(e, T)$ = стандартное отклонение корреляционных интегралов

Таким образом, BDS-статистика w имеет стандартное нормальное распределение вероятности. Когда оно больше 2,0, мы можем с 95-процентной уверенностью отклонить нулевую гипотезу, согласно которой изучаемая система случайна. Когда оно больше 3,0, мы можем отклонить эту теорию с 99-процентной уверенностью. Однако BDS-тест найдет линейную, так же как и нелинейную зависимость в данных. Поэтому для этого испытания необходимо взять AR(1)-разности, как мы делали для R/S-анализа. Кроме того, подобно R/S-анализу зависимость может быть стохастической (как процесс Херста, или GARCH), или она может быть детерминированной (как хаос).

Я взял программу BDS-статистики из работы Дечерта и использовал ее для следующих испытаний. Для проведения испытаний нужно выбрать значение радиуса ϵ и размерности вложения m . Как и в вычислениях корреляционной размерности, описанных в моей предыдущей книге, существует диапазон значений ϵ , где можно вычислить вероятности. Этот диапазон зависит от числа наблюдений T . Если ϵ является слишком маленьким, не будет достаточного количества точек для захвата статистической структуры; если ϵ является слишком большим, точек будет слишком много. Следуя примеру Лебарона (LeBaron, 1990) и Хсие (Hsieh, 1989), мы будем использовать $\epsilon = 0,50$ стандартного отклонения наборов данных. Задав значение ϵ в соответствии с размером данных, мы можем, вероятно, преодолеть эти проблемы.

Мы должны выбрать размерность вложения, благодаря которой получающееся в результате воссоздание фазового пространства не будет ни слишком редким, ни слишком переполненным. Если m является чересчур маленьким, точки будут располагаться слишком плотно. Если m является чересчур большим, точки будут слишком отдаленны. Для целей этого примера мы будем использовать $m = 6$. Хсие (Hsieh, 1989) проверил много размерностей вложения на валютах, и $m = 6$ давало результаты, сопоставимые с другими более высокими (и более низкими) размерностями вложения.

Примеры, данные здесь, не новы. Лебарон (LeBaron, 1990) провел исследование курсов акций, также как и Брок (Brock, 1988). Хсие (Hsieh, 1989) проводил обширные испытания валют и выполнил полный набор экспериментов методом Монте-Карло, которые мы опишем ниже.

Я исследовал уравнение Макки-Гласса без шума, с одним стандартным отклонением наблюдаемого шума и с одним стандартным отклонением системного шума. Я также проверил дробный шум с $H = 0,72$, который мы использовали ранее, а также смоделированный ряд GARCH, использованный в Главе 5. В соответствии с более ранними утверждениями о линейной зависимости я снова использовал AR(1)-разности для всех испытаний в этой главе. Результаты приведены в Таблице 16.1.

Уравнение Макки-Гласса без шума показывает, как и ожидалось, высоко значимую BDS-статистику, равную 112. Кроме того, загрязненные шумом системы Макки-Гласса имеют значимые BDS-статистики, хотя и на более низких уровнях. Смоделированный ряд GARCH также показывает значимую BDS-статистику, равную 6,23, так же как и ряд дробного шума при 13,85. В этих смоделированных рядах показано, что BDS-статистика чувствительна к нелинейной зависимости и в

Часть 5. Шумовой хаос

детерминированной, и в стохастической форме. Она устойчива относительно шума, когда используется в анализе детерминированной системы.

Таблица 16.1 BDS-статистика: смоделированные процессы

Процесс	BDS-статистика	Эпсилон	Размерность вложения	Число наблюдений
Макки-Глэсс				
Без шума	56,88	0,12	6	1.000
Наблюдаемый шум	13,07	0,06	6	1.000
Системный шум	-3,12	0,08	6	1.000
Дробный шум ($H = 0,72$)	13,85	0,07	6	1.400
GARCH	6,23	0,01	6	7.500
Гауссов шум	0,03	0,06	6	5.000

В Таблице 16.2 показаны результаты для 20-дневных и пятидневных рядов индекса Доу-Джонса, использованных в Главе 8, а также результаты для ежедневной иены. Мы снова видим, что все они являются значимыми – и удивительно большими. Однако ежедневная статистика японской иены, составляющая 116,05, совместима со значением Хсие (Hsieh, 1989), составляющим 110,04, для тех же самых значений R и m . Лебарон (LeBaron, 1990), используя еженедельные данные S&P 500 с 1928 г. по 1939 г., нашел, что $w = 23,89$ для $m = 6$.

Таблица 16.2 BDS-статистика: рыночный временной ряд

Рынок	BDS-статистика	Эпсилон	Размерность вложения	Число наблюдений
Доу-Джонс — пять дней	28,72	0,01	6	5.293
Доу-Джонс — 20 дней	14,34	0,03	6	1.301
Иена/Доллар — каждый день	116,05	0,03	6	4.459

Это очень близко к найденному нами значению $w = 28,72$ для пятидневных прибылей по индексу Доу-Джонса (1888 – 1990 гг.), даже притом, что наши данные охватывают намного более длинный интервал времени. Лебарон нашел, что в течение десятилетних периодов значение w значительно варьировалось. Учитывая четырехлетний цикл фондовой биржи, найденный посредством R/S-анализа, такая изменчивость в коротких интервалах времени не является необычной. В конце концов, десять лет составляет только 2,50 орбиты.

Хсие (Hsieh, 1989) и Лебарон (LeBaron, 1990) выполнили моделирования BDS-статистики по методу Монте-Карло и нашли, что она устойчива по отношению к гауссовой нулевой гипотезе. Таким образом, подобно R/S-анализу, она может легко найти зависимость. Если линейная зависимость найдена, BDS-статистика является значимым тестом на нелинейность. К сожалению, она не может различать дробный шум и детерминированный хаос, но если ее использовать в сочетании с другими испытаниями, она представляет собой мощный инструмент.

Объединение испытаний

В отсутствие длинного набора данных (и в отношении времени, и в отношении числа наблюдений) лучше прибегнуть к многократным независимым тестам, которые должны подтверждать друг друга. R/S-анализ предлагает еще один инструмент для этого. Он является чрезвычайно устойчивым относительно шума и должен рассматриваться как дополнительное испытание (наряду с BDS-статистикой) для всех наборов данных, которые мы подозреваем в хаотичности.

Последствия для FMH

Для гипотезы фрактального рынка разрыв в графике R/S для данных индекса Доу-Джонса подтверждает, что рынок является хаотическим в долгосрочной перспективе и следует за экономическим циклом. Валюта, тем не менее, не регистрирует средние неперiodические циклы, несмотря на тот факт, что ежедневный показатель Херста для большинства видов валюты более значим, чем ежедневные доходы по индексу Доу-Джонса или казначейским облигациям. Это еще раз подтверждает, что валюта представляет собой процесс дробного шума, даже в долгосрочной перспективе.

ВЫВОДЫ

Мы выяснили, что R/S-анализ является дополнительным инструментом для исследования шумного хаотического временного ряда. Мы также выяснили, что он чрезвычайно устойчив относительно шума, а также, что показатель Херста может использоваться как показатель шума при подготовке смоделированных данных. Эти качества делают R/S-анализ полезным процессом для изучения хаотических систем.

Наконец, мы подошли к отношениям между фрактальной статистикой и шумовым хаосом. Может ли шумовой хаос быть причиной распределений с толстыми хвостами и высокими пиками, которые так распространены на финансовых рынках, так же как и в других естественных временных рядах? Мы узнаем это в Главе 17.

Фрактальная статистика, шумовой хаос и FMH

В Главе 16 мы видели, что рынок капитала и экономический временной ряд имеют некоторые схожие черты с шумными "хаотическими" системами. В частности, их показатели Херста совместимы со значениями H , рассчитанными из спектрального показателя β . Мы также нашли, что R/S-анализ может оценить среднюю длину непериодического цикла на основании "разрыва" в графике в логарифмическом масштабе по обеим осям. Эта длина цикла была подобна циклам, найденным R/S-анализом для рынков капитала и для экономического временного ряда. Популярные стохастические процессы, типа GARCH, которые также используются как возможные модели, не имеют этих характеристик.

На основании результатов из предыдущих глав кажется, что шумовой хаос является разумным объяснением движений рынка капитала. За исключением валюты, шумовой хаос совместим с долгосрочным, фундаментальным поведением рынков, а дробное броуновское движение более совместимо с краткосрочными торговыми характеристиками. Оба типа поведения совместимы с гипотезой фрактального рынка, описанной в Главе 3.

Заключительный вопрос касается отношений между шумовым хаосом и устойчивыми, или фрактальными, распределениями. Могут ли эмпирически наблюдаемые распределения с высокими пиками и толстыми хвостами, а также перемежающееся динамическое поведение также быть связаны с шумовым хаосом? В этой главе мы исследуем этот вопрос. В качестве возможного объяснения можно предложить шумовой хаос, но мы найдем, что многое остается необъяснимым.

В заключительном разделе этой главы я пытаюсь привести в соответствие различные элементы анализа временных рядов, которые, кажется, дают значимые результаты: ARCH, дробный шум и шумовой хаос будут объединены в одну структуру. Применимость каждого процесса зависит от индивидуальных инвестиционных горизонтов. Мы должны сначала исследовать взаимосвязь между фрактальной статистикой и шумовым хаосом.

ЧАСТОТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Частотное распределение изменений – вот откуда нужно начать. Хорошо известно, что изменения в системе, характеризующейся детерминированным хаосом, имеют частотное распределение с длинным положительным хвостом. На Рисунке 17.1 показано уравнение Макки-Гласса с частотным распределением на основе использования изменений в графике, приведенном на Рисунке 6.7. Изменения были "нормализованы" к среднему 0 и стандартному отклонению 1. Результатом является распределение, которое выглядит "логарифмически нормальным"; то есть оно имеет

17. Фрактальная статистика, шумовой хаос и FMH

одну вершину, длинный положительный хвост и конечный отрицательный хвост. Добавление шума к этим системам приводит к значительным изменениям в их частотных распределениях. На Рисунках 17.2(a) и 17.2(b) показано уравнение Макки-Гласса с наблюдаемым и системным шумом соответственно.

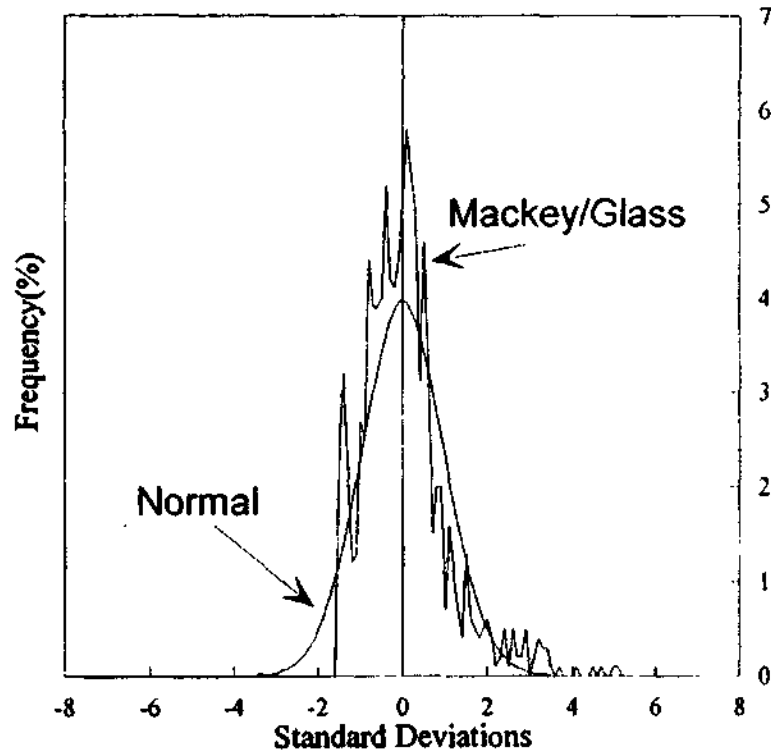


РИСУНОК 17.1 Уравнение Макки-Гласса: без шума.

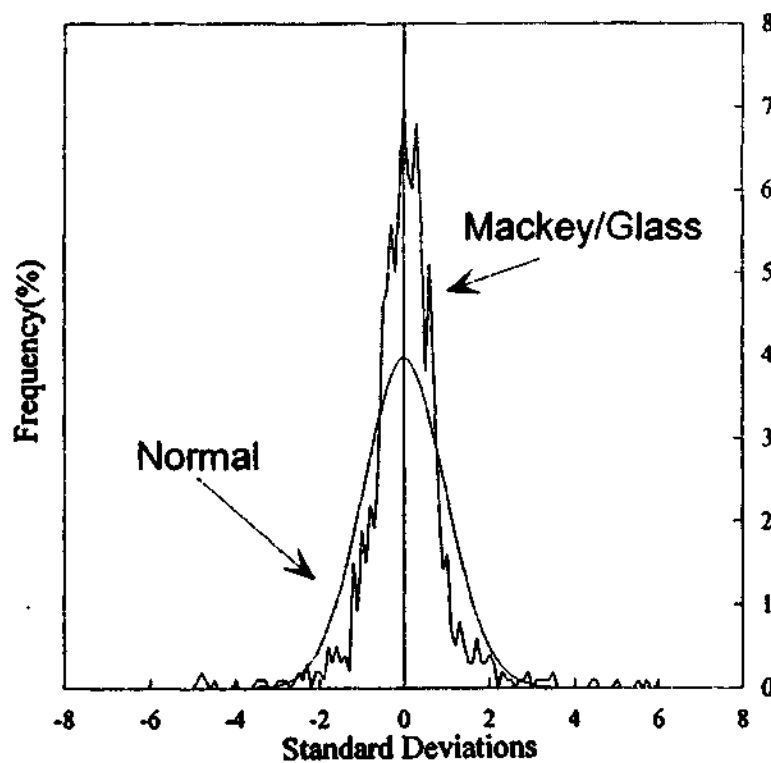


РИСУНОК 17.2а Уравнение Макки-Гласса: наблюдаемый шум.

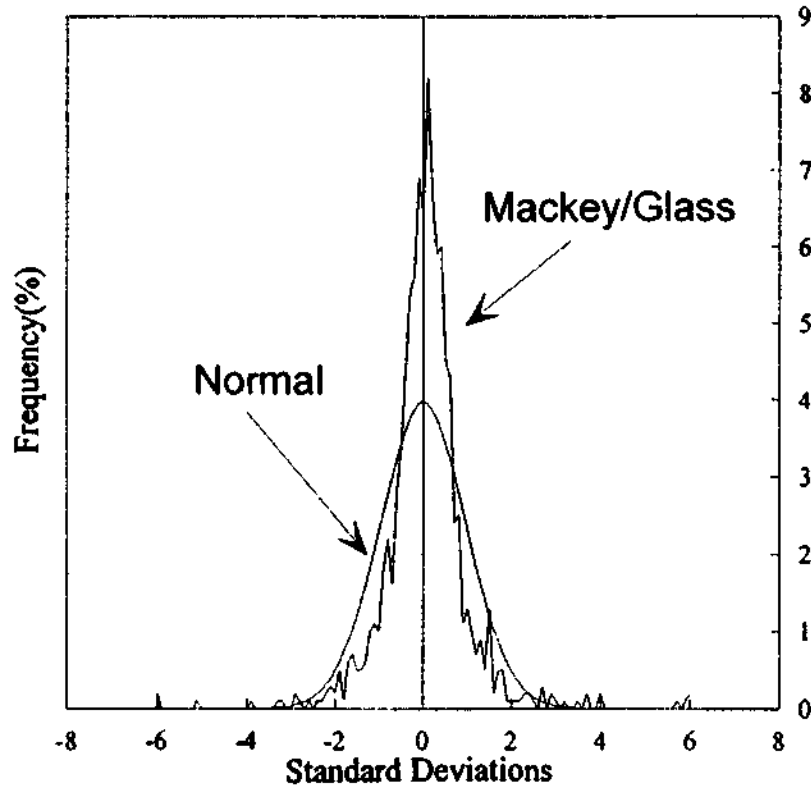


РИСУНОК 17.2b Уравнение Макки-Гласса: системный шум.

Для генерирования показателя Херста, равного 0,70, было добавлено достаточно шума, как показано в Главе 16. Частотное распределение теперь представляет собой знакомое распределение с высоким пиком и толстыми хвостами. На Рисунках 17.3(a)-17.3(c) показаны различия между этими распределениями и нормальным распределением. Системы с шумом напоминают графики индекса Доу-Джонса на Рисунках 2.4(a)-2.4(e), но графики без шума выглядят совсем по-другому. Почему?

Добавление нормально распределенного гауссова шума, согласно нашим предшествующим исследованиям, приводит к понижению показателя Херста. Кроме того, оно смещает среднее к центру (сближая среднее и медиану), удлиняет отрицательный хвост и добавляет больше (отрицательных) значений. Положительный хвост сокращается вследствие смещения среднего и добавления меньших значений. Однако первоначальное распределение имело высокий пик и длинный положительный хвост. Откуда появился длинный отрицательный хвост?

Для уравнения Макки-Гласса, показанного на Рисунке 6.7, я взял уравнение (6.4) и добавил 10 к получающимся значениям. Это преобразование было необходимо, потому что уравнение (6.4) производит отрицательные значения, а взять логарифм отрицательного числа нельзя. Прибавление 10 привело к передвижению всех значений в положительную область. Добавленный шум был белым гауссовым шумом. В результате шум имел большее воздействие на изменения во впадинах системы, чем на изменения в ее пиках. Отсюда и более длинный отрицательный хвост.

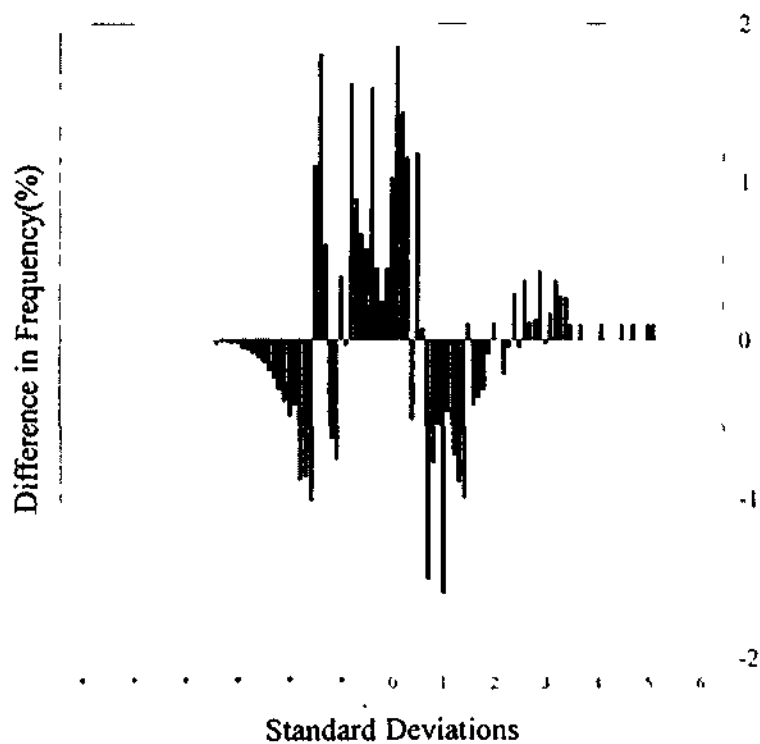


РИСУНОК 17.3a Уравнение Макки-Гласса: без шума – нормальное распределение.

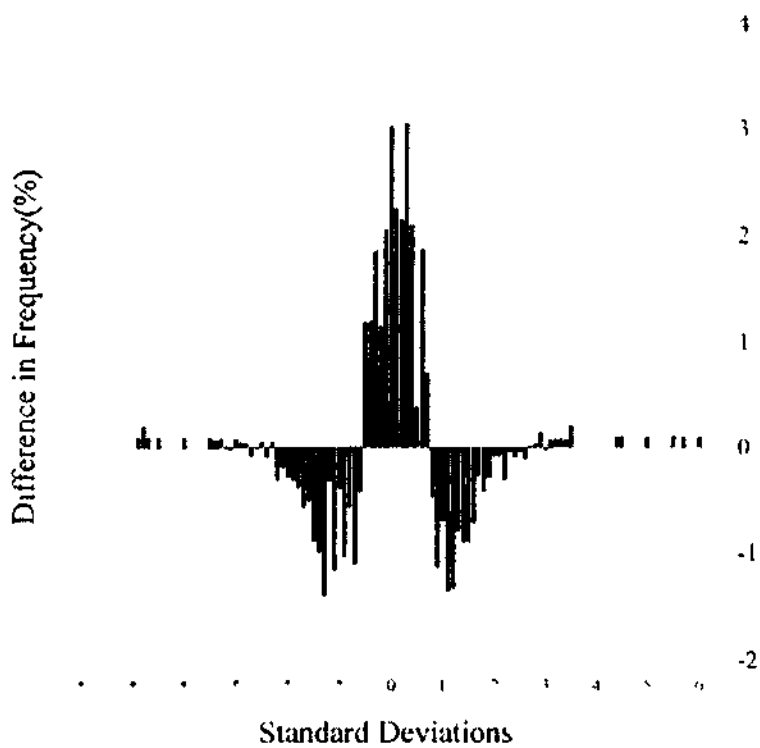


РИСУНОК 17.3b: Уравнение Макки-Гласса: наблюдаемый шум – нормальное распределение.

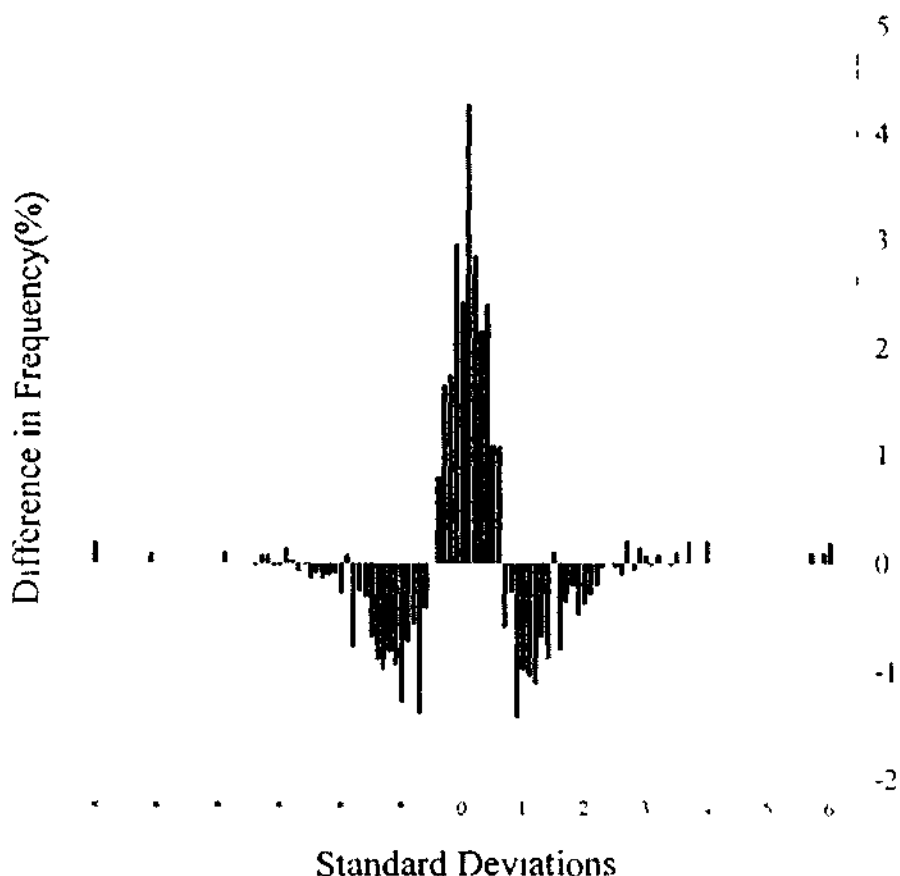


РИСУНОК 17.3с: Уравнение Макки-Гласса: системный шум – нормальное распределение.

При системном шуме изменение является другим. Отрицательный хвост весьма длинен – почти такой длинный, как и положительный хвост. Схожесть частотных распределений системного шума с распределениями рынка капитала, которые мы видели в Главе 2, поразительна. Фактически, это первый смоделированный ряд, отличный от ARCH и его производных, который имеет эту характеристику.

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В Главе 2 мы рассмотрели временную структуру волатильности рынков акций, облигаций и валюты. Временная структура волатильности – стандартное отклонение прибылей на различных горизонтах времени. Если рыночные прибыли определяются нормальным распределением, то волатильность должна увеличиться с квадратным корнем из времени. То есть пятидневные прибыли должны иметь стандартное отклонение, эквивалентное стандартному отклонению ежедневных прибылей, умноженному на квадратный корень из пяти. Однако мы нашли, что акции, облигации и валюта имеют такие временные структуры волатильности, которые увеличиваются быстрее квадратного корня из времени, что согласуется со свойствами распределений бесконечной дисперсии и дробного броуновского движения (FBM). Для чистого процесса FBM такое масштабирование должно увеличиваться бесконечно. Мы нашли, что валюта, как оказалось, не имеет предела масштабирования, но

17. Фрактальная статистика, шумовой хаос и FMH

американские акции и облигации ограничиваются приблизительно на уровне четырех лет; то есть 10-летние прибыли имеют фактически то же самое стандартное отклонение, что и четырехлетние прибыли. Такому ограниченному поведению не давалось никакого объяснения, но четырехлетний предел удивительно похож на четырехлетний цикл, найденный R/S-анализом. Может ли здесь быть связь?

Концептуально, да, связь есть. В хаотической системе, аттрактор – ограниченное множество. После перемещения системы по одному циклу изменения перестанут расти. Следовательно, было бы неудивительно обнаружить, что хаотические системы также имеют ограниченные временные структуры волатильности. Фактически, ограниченные временные структуры волатильности могут быть еще одним способом проверки на наличие неперiodических циклов.

Рисунок 17.4(a) показывает временную структуру волатильности уравнения Макки-Гласса с задержкой в 50 итераций. Масштабирование останавливается как раз перед 50 итерациями. Рисунок 17.4(b) показывает временную структуру волатильности для уравнения Макки-Гласса с добавленным наблюдаемым и системным шумом. Это те же самые временные ряды с добавлением шума, которые используются на протяжении всей книги. Они оба имеют $H \sim 0,70$ против $H = 0,92$ для версии без шума. Ряды с добавленным шумом еще более убедительны, чем аттрактор Макки-Гласса без шума. Пик на обоих графиках происходит, несомненно, при $n = 50$ итераций, то есть среднем неперiodическом цикле системы.

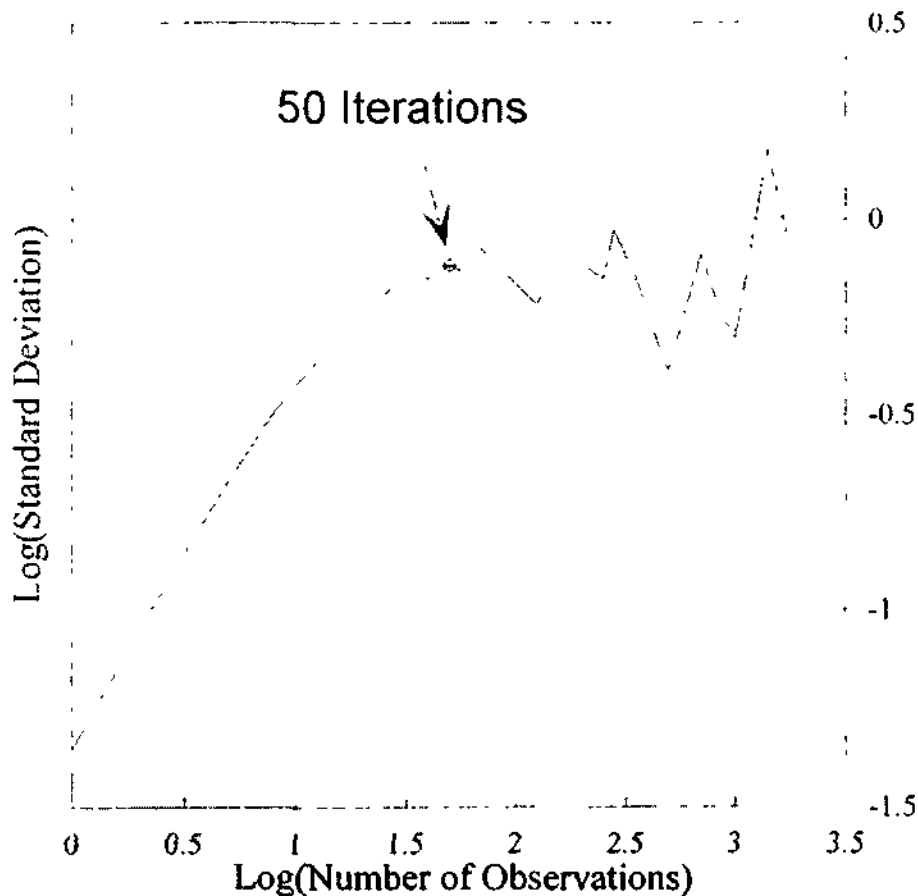


РИСУНОК 17.4а Уравнение Макки-Гласса: временная структура волатильности.

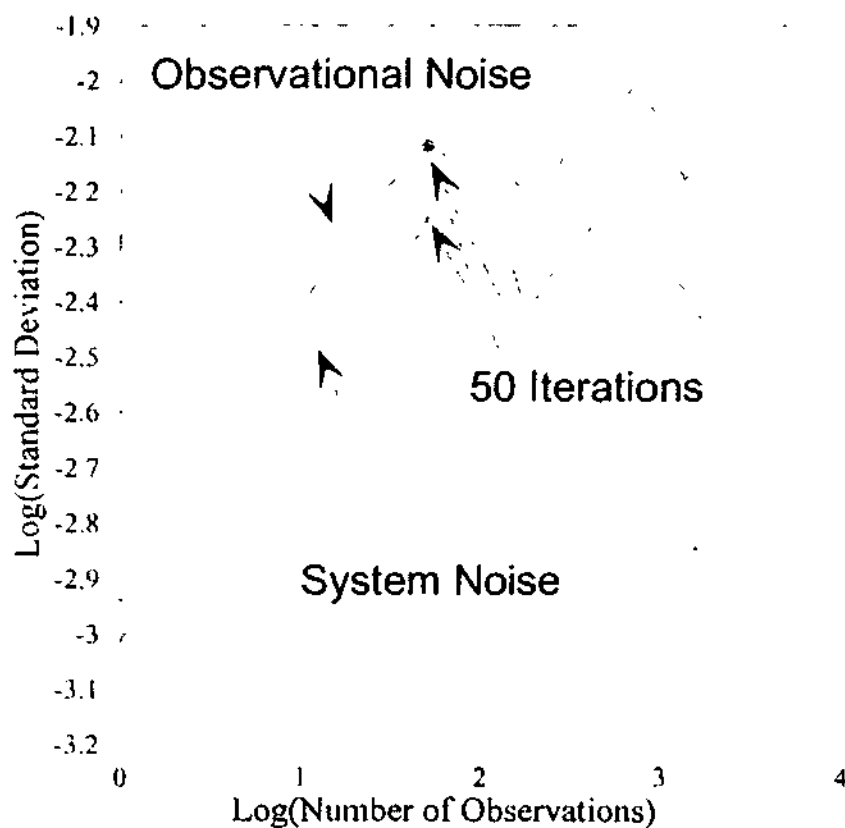


РИСУНОК 17.4b Уравнение Макки-Гласса с шумом: временная структура волатильности.

Я провел подобный анализ для аттракторов Лоренца и Росселера. Я призываю читателей самим пробовать этот анализ, используя программу, приведенную в Приложении 2 или собственную программу. Временная структура волатильности этих хаотических систем имеет поразительное сходство с аналогичными графиками рынков акций и облигаций, приведенными в Главе 2. Валюта не имеет этой ограниченной характеристики – еще одно свидетельство того, что валюта является не "хаотическим" процессом, а, вместо этого, процессом дробного шума. Это не подразумевает, что валюта не имеет интервалов изменения; очевидно, что она их имеет, но у этих интервалов изменений нет средней длины. Что касается валюты, джокер действительно появляется случайным образом, что же касается американских акций и облигаций, джокер имеет среднюю частоту появления, составляющую четыре года.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ И СРЕДНЕЕ

В Главе 14 мы исследовали последовательное стандартное отклонение и среднее значение американской фондовой биржи и сравнили его с временным рядом, полученным из распределения Коши. Мы сделали это, чтобы увидеть влияние бесконечных дисперсии и среднего на временной ряд. Последовательное стандартное отклонение – стандартное отклонение временного ряда, когда мы за раз прибавляем

17. Фрактальная статистика, шумовой хаос и FMH

одно наблюдение. Если бы ряды были получены из гауссовского случайного блуждания, то чем больше наблюдений мы бы имели, тем больше последовательное стандартное отклонение стремилось бы к стандартному отклонению совокупности. Аналогично, если среднее значение устойчиво и конечно, выборочное среднее будет, в конечном счете, сходиться к математическому ожиданию. Для файла данных индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний мы нашли мало доказательств конвергенции приблизительно после 100 лет данных. Это подразумевает, что в более короткие периоды процесс намного более похож на бесконечную дисперсию, чем на распределение конечной дисперсии. Последовательное среднее сходилось более быстро, и выглядело более устойчивым. Фрактальное распределение, конечно, хорошо бы описывалось бесконечной или неустойчивой дисперсией, а также конечным и устойчивым средним. После изучения индекса Доу-Джонса, мы, казалось, нашли желаемые характеристики.

Теперь было бы интересно изучить последовательную статистику хаотических систем. Имеют ли они также бесконечную дисперсию и конечное среднее? Они проявляют распределения с толстыми хвостами при добавлении шума, но одного этого факта недостаточно для объяснения рыночного анализа, который мы уже провели.

Без шума кажется, что уравнение Макки-Гласса персистентно с неустойчивым средним и дисперсией. С шумом, и наблюдаемым и системным, система ближе к рыночному ряду, *но не идентична ему*. В этом исследовании, как и в Главе 15, все ряды были нормализованы к среднему 0 и стандартному отклонению 1. Конечное значение в каждом ряде будет всегда иметь среднее, равное 0.

Рисунок 17.5(a) показывает последовательное стандартное отклонение 1 000 итераций уравнения Макки-Гласса без шума. Система непостоянна, имеет дискретные скачки в стандартном отклонении, сопровождаемые устойчивыми падениями – очень подобно рядам Коши и индекса Доу-Джонса, которые рассматривались в Главе 15. На Рисунках 17.5(b) и 17.5(c) приведены подобные исследования наблюдаемого и системного шума соответственно. Добавление шума делает скачки меньшими, но они, тем не менее, остаются в обоих случаях. На основании этих графиков мы можем сделать вывод, что уравнение Макки-Гласса не имеет устойчивой дисперсии.

На Рисунке 17.6(a) показано последовательное среднее для ряда с наблюдаемым шумом и ряда без шума. Влияние добавления шума заключается в том, что он притягивает последовательное среднее ближе к 0. Ни один ряд не является столь же устойчивым, как ряд индекса Доу-Джонса и случайная последовательность, которые мы видели в Главе 14, хотя ряд с наблюдаемым шумом является более близким, так как он только на 0,02 стандартного отклонения отстоит от среднего. На Рисунке 17.6(b) приведен график последовательного среднего для уравнения Макки-Гласса с системным шумом. Снова кажется, что там есть устойчивое математическое ожидание, хотя имеет место систематическое отклонение. Мы можем экспериментально заключить, что уравнение Макки-Гласса не имеет устойчивого среднего, но наблюдаемый шум может дать видимость среднего, устойчивого до некоторой степени. Когда я провел этот анализ для аттракторов Лоренца и Росселера,

Часть 5. Шумовой хаос

результаты были сопоставимы. Хаотические аттракторы, хотя они и получены опытным путем, кажутся подобными рыночным временным рядам в том, что они имеют неустойчивые дисперсии.

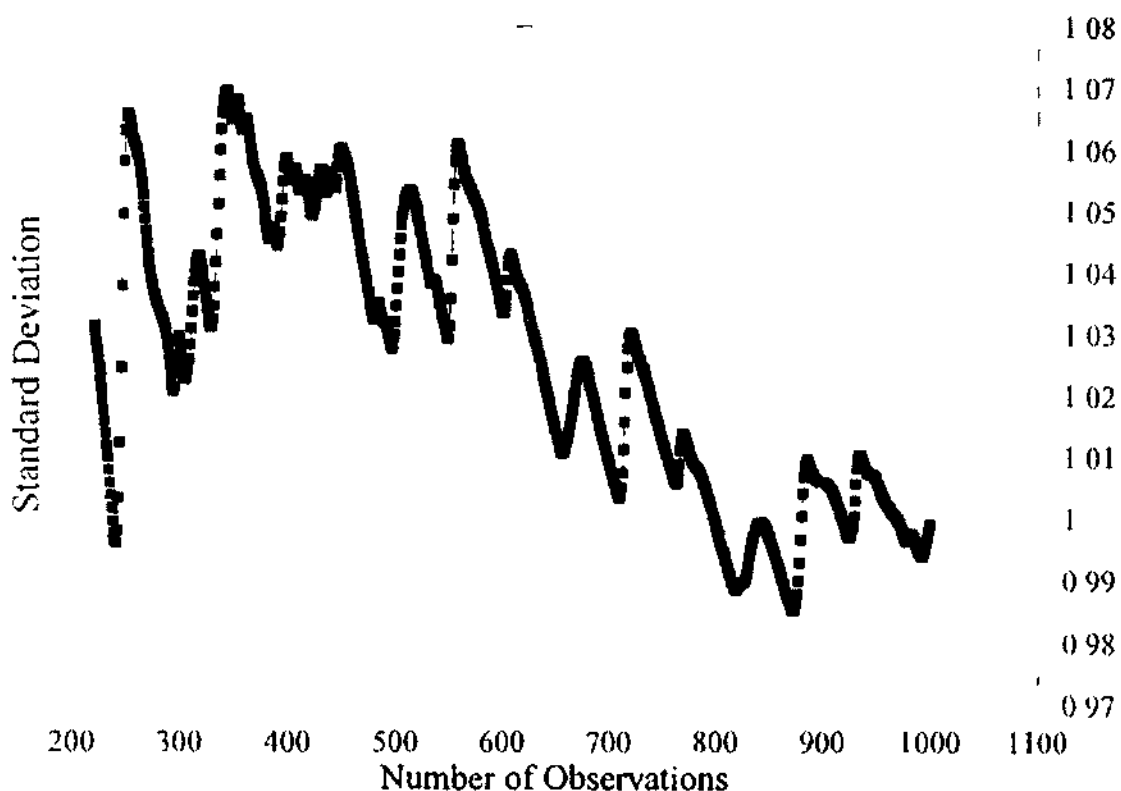


РИСУНОК 17.5a Уравнение Макки-Гласса: последовательное стандартное отклонение.

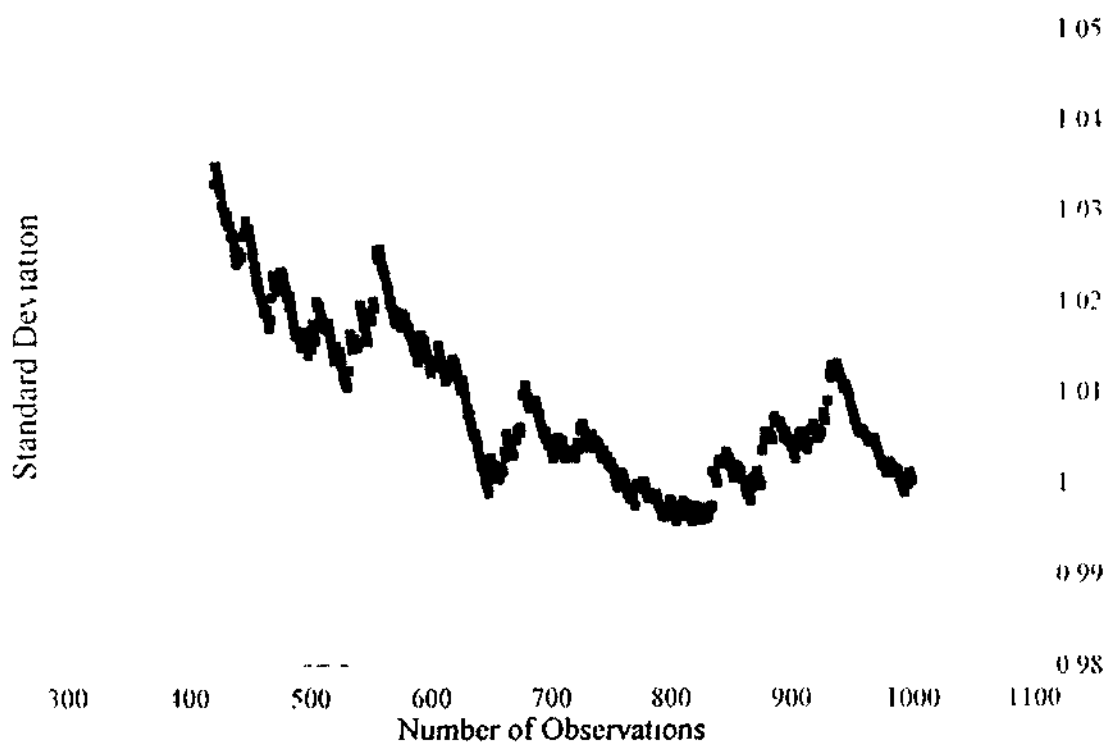


РИСУНОК 17.5b Уравнение Макки-Гласса с наблюдаемым шумом: последовательное стандартное отклонение.

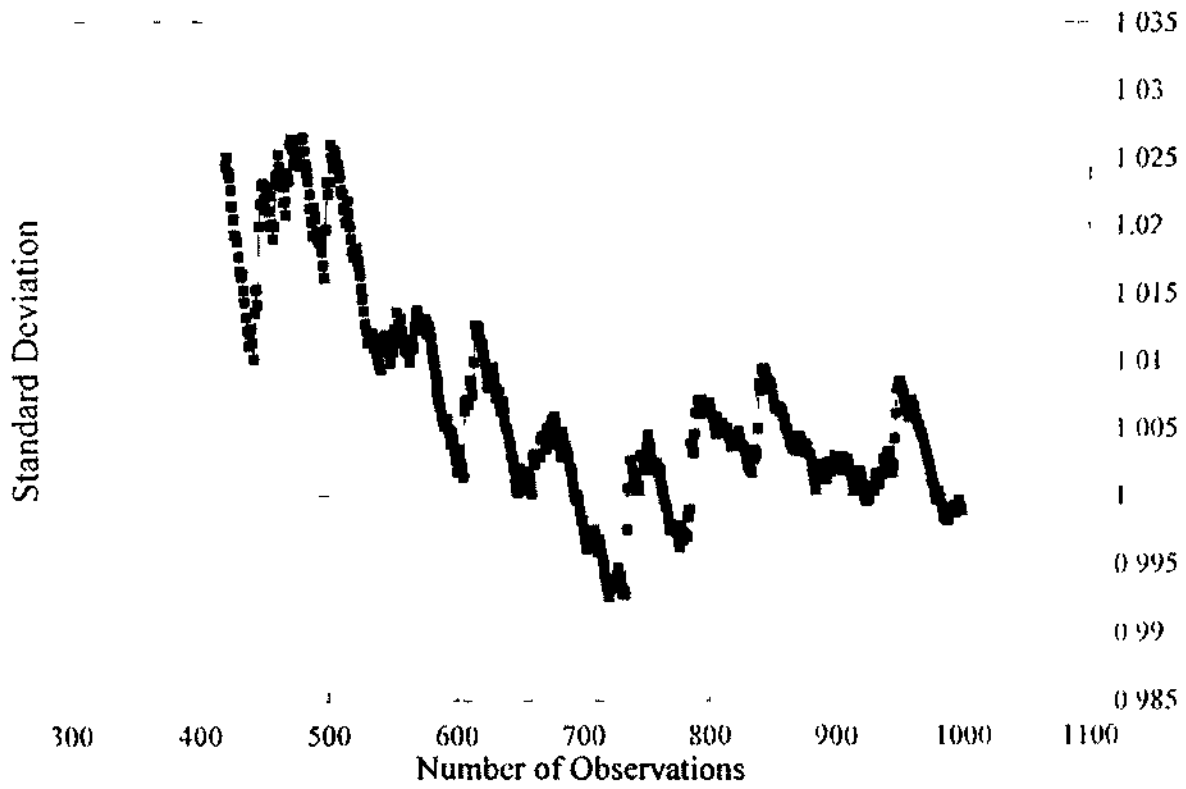


РИСУНОК 17.5c Уравнение Макки-Гласса с системным шумом: последовательное стандартное отклонение.

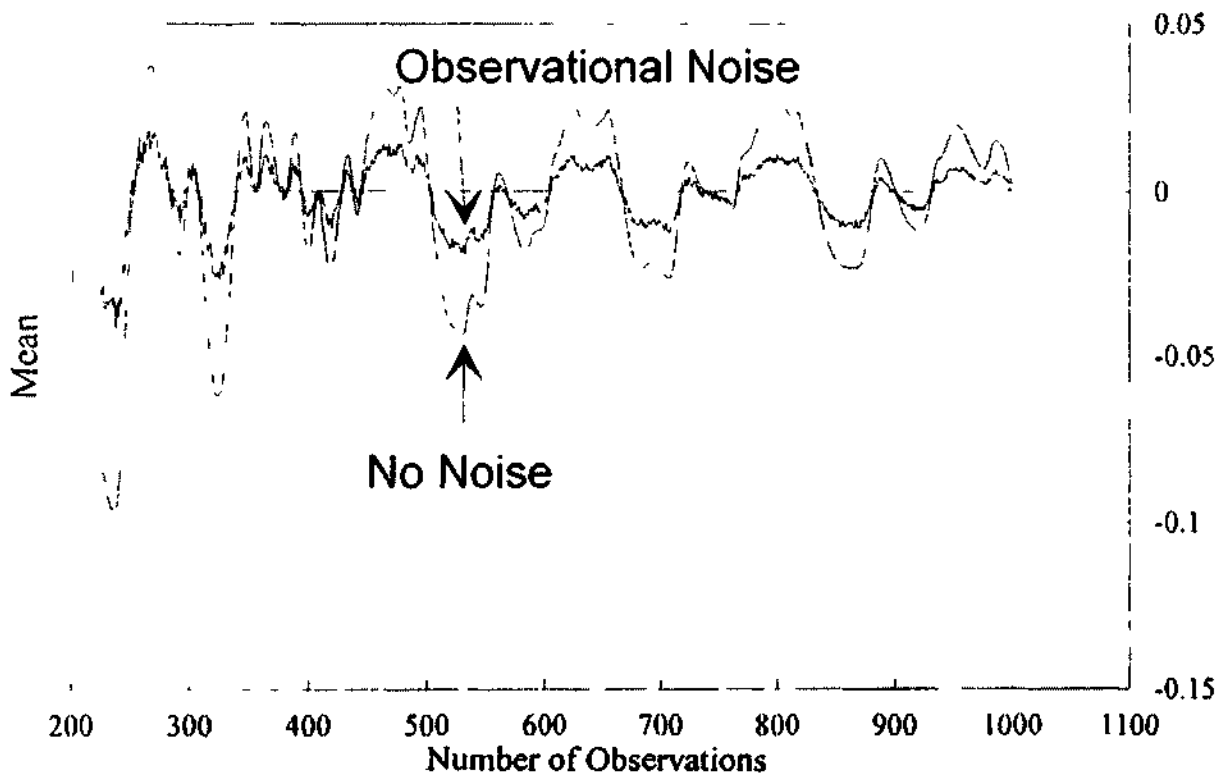


РИСУНОК 17.6a Уравнение Макки-Гласса: последовательное среднее.

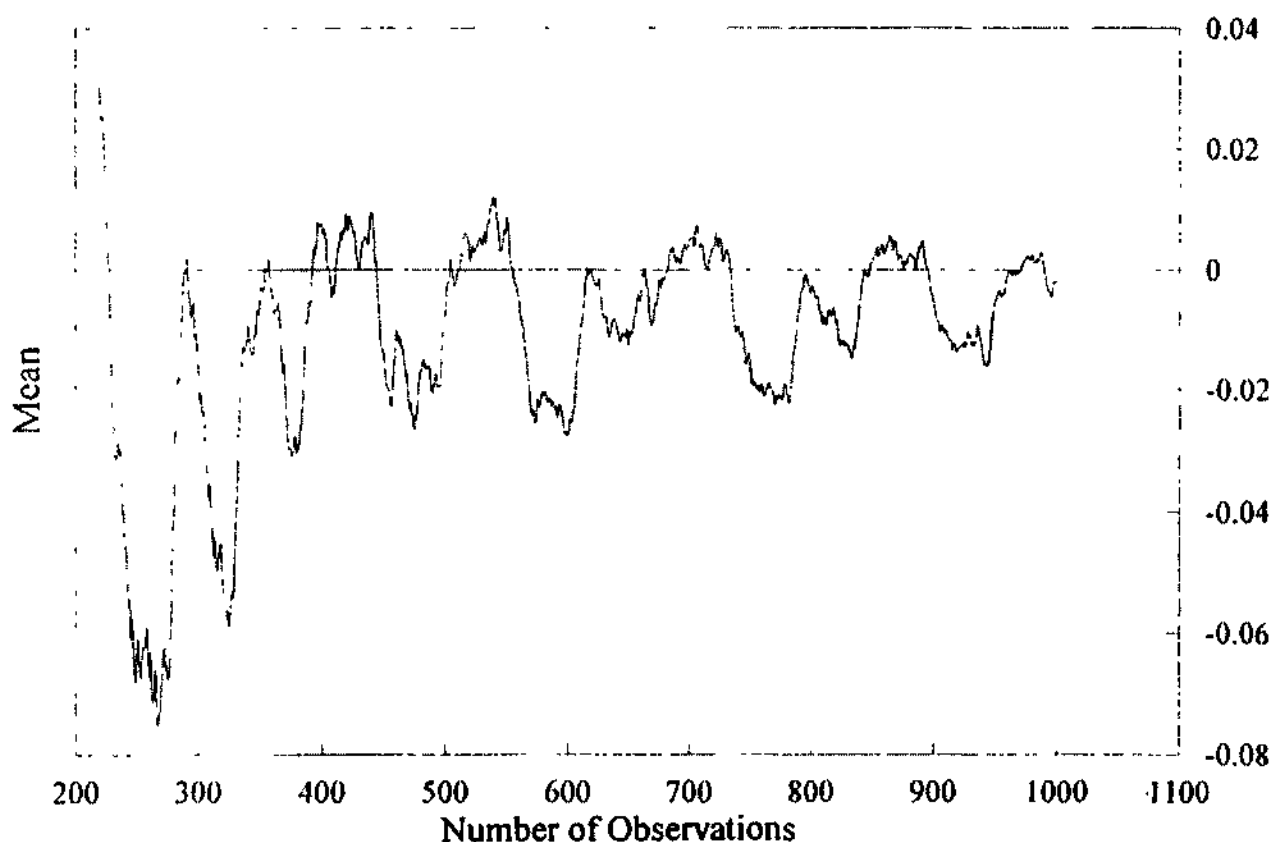


РИСУНОК 17.6b Уравнение Макки-Гласса с системным шумом: последовательное среднее.

Подобно рыночным временным рядам хаотические аттракторы также имеют непостоянные средние значения; однако системы с шумом действительно напоминают рыночные временные ряды. Возможно, долгосрочные рыночные временные ряды подобны хаотическим.

ИЗМЕРЕНИЕ α

Вторая характеристика ряда рынка капитала – показатель Херста между 0,50 и 1,00. Как следовало бы ожидать, чистый хаотический поток, подобно аттрактору Лоренца или уравнению Макки-Гласса, будет иметь показатели Херста близкие к 1, но меньше 1, вследствие неперiodического компонента цикла. Каково воздействие шума на показатель Херста системы?

Графический метод

Используя графический метод из Главы 15, мы можем определить, что α приблизительно составляет 1,57 для системы с наблюдаемым шумом, как показано на Рисунке 17.7. Это дает приблизительное значение $H = 0,64$. Показаны и положительные, и отрицательные хвосты.

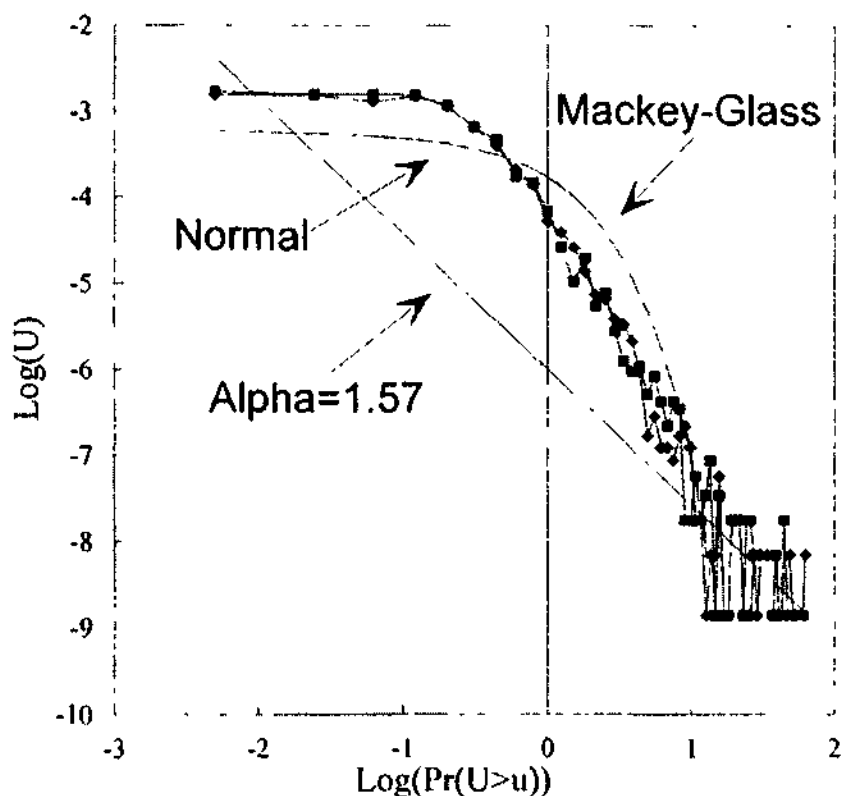


РИСУНОК 17.7 Уравнение Макки-Гласса с системным шумом: оценка альфы, графический метод.

R/S-анализ

Когда мы проводили R/S-анализ этой системы, он дал $H = 0,72$, что является существенно более высоким значением, чем значение, полученное графическим методом. Оба значения значительно отличаются от гауссовой нормы, а также они значительно отличаются друг от друга. В этом состоит главное несоответствие.

ВЕРОЯТНОСТЬ ШУМОВОГО ХАОСА

Гипотеза шумового хаоса, для наших наблюдений, базируется на идее о том, что, поскольку у нас возникает столько трудностей при измерении системы, двух стандартных отклонений шума все еще недостаточно для генерирования показателей Херста, подобных тем, которые мы видели в Главе 9. Я считаю, что это маловероятно (хотя другие могут считать иначе). Мы уже видели одну систему с показателем Херста, быстро падающим до 0,70 – функцию Вейерштрасса в уравнении (6.2). Функция Вейерштрасса была наложением многочисленных систем, работающих на многочисленных частотах, которые изменяют масштаб самоаффинным образом. Работая в рамках гипотезы фрактального рынка, вероятно, что каждый инвестиционный горизонт имеет свою собственную динамическую систему, которая налагается и добавляется к долговременной нелинейной динамической системе. Такая система имела бы динамику, которая существует на каждом инвестиционном горизонте. Поскольку частотное распределение на каждом горизонте аналогично, мы

Часть 5. Шумовой хаос

можем постулировать, что работает та же самая динамика, даже если параметры, которые являются важными на каждом горизонте, изменяются. Такое наложение многих персистентных процессов на различных частотах является зеркальным отображением процессов релаксации, которые были предложены как структура розового шума. Существует возможность того, что черный шум также является результатом бесконечного числа персистентных процессов на различных частотах, сложенных вместе таким образом, который подобен функции Вейерштрасса. Это было бы полностью совместимо с гипотезой фрактального рынка.

Наконец, мы можем понять, почему Херст (и мы) наблюдал так много процессов, которые имеют показатели Херста приблизительно равные 0,70. Динамическая система с добавлением шума быстро упадет до 0,70 в присутствии и наблюдаемого, и системного шума. Поскольку некоторая комбинация обоих типов шума, вероятно, присутствует в измерениях всех реальных систем, показатели Херста, приблизительно равные 0,70, являются достаточно распространенными. Собственные данные Херста показывают, что как раз это имеет место, так что мы можем постулировать, что шумовой хаос является обычным явлением. Менее обычными были бы показатели Херста меньше 0,70. Однако на ежедневных частотах значения H , равные 0,60 и меньше, весьма распространены, указывая на необходимость альтернативного объяснения "шума".

ОРБИТАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Заключительной характеристикой, которую мы уже исследовали, являются длины циклов. В предыдущих главах мы исследовали, как показатель Херста раскрывает периодические и непериодические циклы. Пришло время исследовать эту особую характеристику, поскольку она имеет отношение к динамическим системам.

Сначала мы исследуем хорошо известный аттрактор Лоренца:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma * X + \sigma * Y \\ \frac{dY}{dt} &= -X * Z + r * X - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= X * Y - b * Z\end{aligned}\tag{17.1}$$

где $\sigma = 10$, $b = 8/3$, а $r = 28$

Эти параметры широко используются для моделирования хаотической области. Цикл аттрактора Лоренца не может быть явно определен; однако методом *сечений Пуанкаре* было оценено, что он составляет приблизительно 0,50 секунды. Хотя метод сечений Пуанкаре полезен для моделируемых данных, он менее надежен, когда мы имеем дело с экспериментальными данными. В данном анализе мы использовали 100 секунд координаты X при выборке через каждые 0,10 секунды. На Рисунке 17.8(a) показан график в логарифмическом масштабе по обеим осям, а на Рисунке 17.8(b)

17. Фрактальная статистика, шумовой хаос и FMH

показан график V-статистики. Изгиб графика в логарифмическом масштабе по обеим осям и пик графика V-статистики совместимы с орбитальным циклом в 0,50 – 0,70 секунды. Эта оценка совместима с оценкой метода сечений Пуанкаре. Тем не менее, как мы видели в Главе 6, она очень устойчива относительно шума.

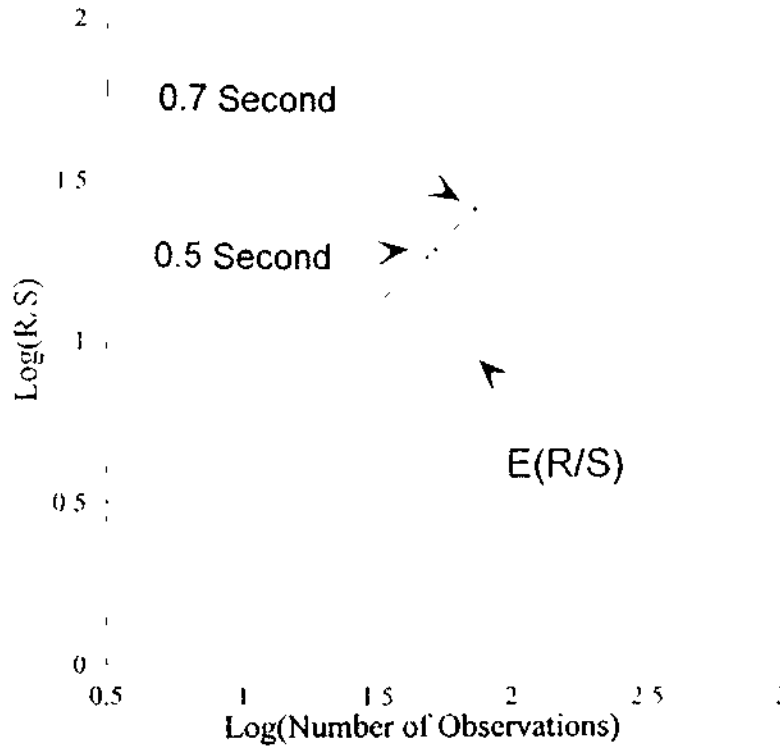


РИСУНОК 17.8a Аттрактор Лоренца: R/S-анализ.

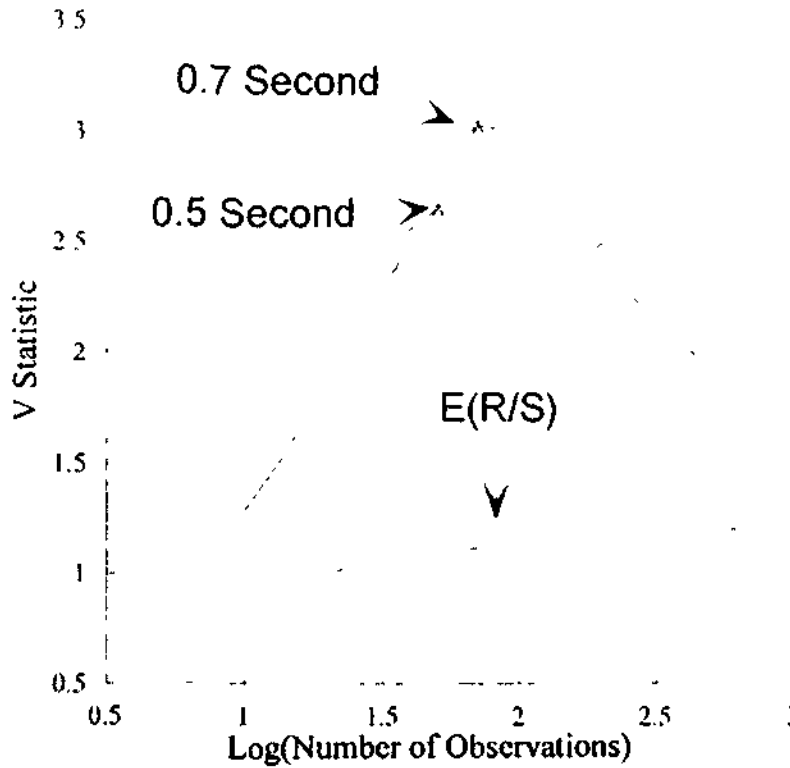


РИСУНОК 17.8b Аттрактор Лоренца: V-статистика.

Часть 5. Шумовой хаос

В Главе 6 мы видели, что изменение длины цикла для уравнения Макки-Гласса привело к разрыву в графике приблизительно в этой точке. Рисунок 17.9 показывает график V-статистики для различных уровней наблюдаемого шума. Мы снова видим, что R/S-анализ очень устойчив относительно шума.

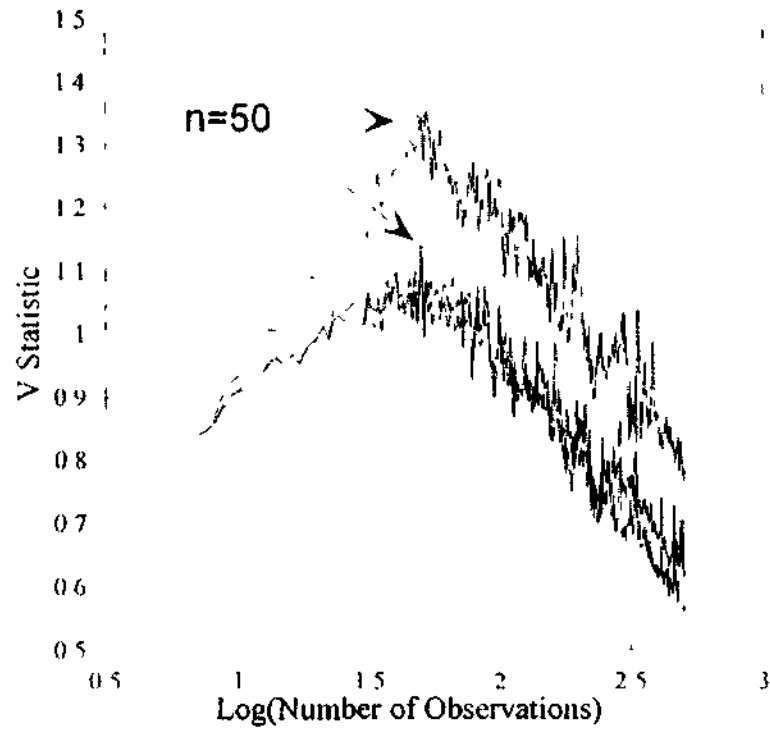


РИСУНОК 17.9 Уравнение Макки-Гласса с наблюдаемым шумом: V-статистика.

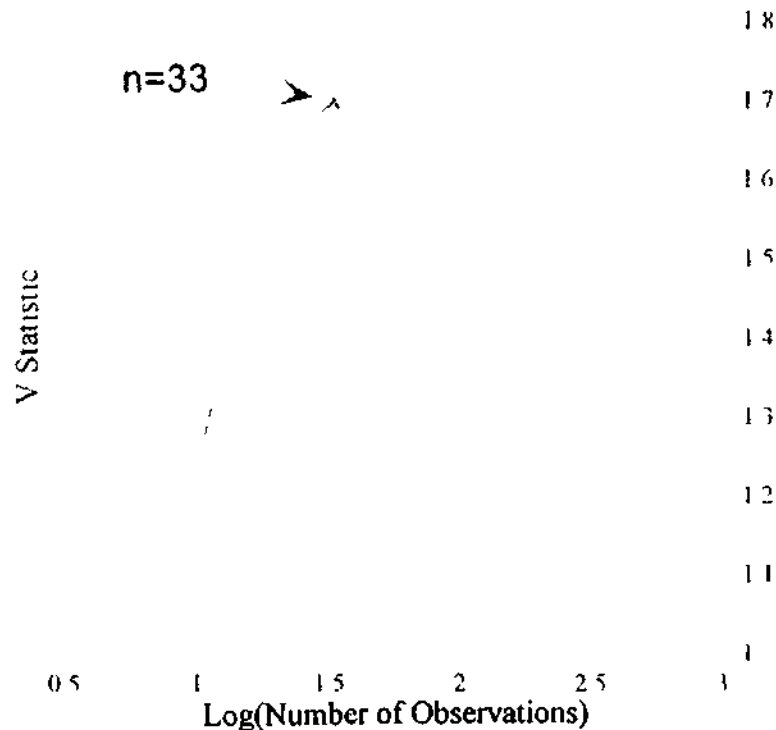


РИСУНОК 17.10а Уравнение Макки-Гласса, выборка произведена через каждые три интервала: V-статистика.

Еще раз повторим, что сходство этих графиков с графиками, полученными для рынков капитала, является поразительным. В Главе 6 мы говорили о том, что изменение интервала выборки и повторение процесса R/S-анализа должно привести к циклу, совместимому с более ранним высокочастотным анализом. На Рисунке 17.10(a) мы производим выборку данных Макки-Гласса с 100 задержками, использованных выше, через каждые три интервала. Предполагаемым результатом должен быть цикл приблизительно в 33 наблюдения, и фактический результат с ним согласуется. Рисунок 17.10(b) повторяет анализ с одним стандартным отклонением добавленного шума. Результаты те же самые.

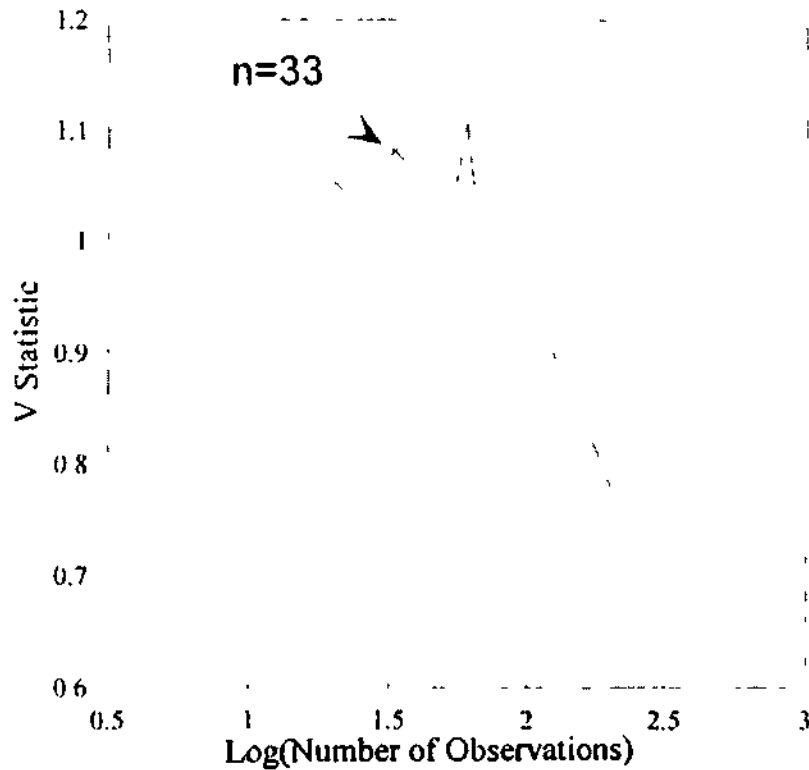


РИСУНОК 17.10b Уравнение Макки-Гласса с шумом, выборка производилась через каждые три интервала: V-статистика.

САМОПОДОБИЕ

Шумовой хаос имеет одну заключительную характеристику, которая согласуется с рыночными данными: его частотные распределения самоподобны. После поправки на масштаб они имеют почти такую же форму. На рисунке 17.11 приведены данные Макки-Гласса без шума, которые использовались для рисунка 17.1. Однако в этом случае выборка осуществлялась через каждые три наблюдения, как в данных, использованных для рисунка 17.10(a). Форма все еще подобна "логарифмически нормальной" форме, которую мы видели ранее. На рисунке 17.12 показано уравнение Макки-Гласса с добавленным наблюдаемым шумом, который использовался для рисунка 17.2. И снова выборка производилась при каждом третьем наблюдении, а частотное распределение фактически идентично более длинному временному ряду. Мы можем видеть, что шумовой хаос имеет многие из признаков,

Часть 5. Шумовой хаос

которые мы находим желательными. Фактически, вероятно, что дробный шум и шумовой хаос в реальных системах являются, на самом деле, одним и тем же явлением.

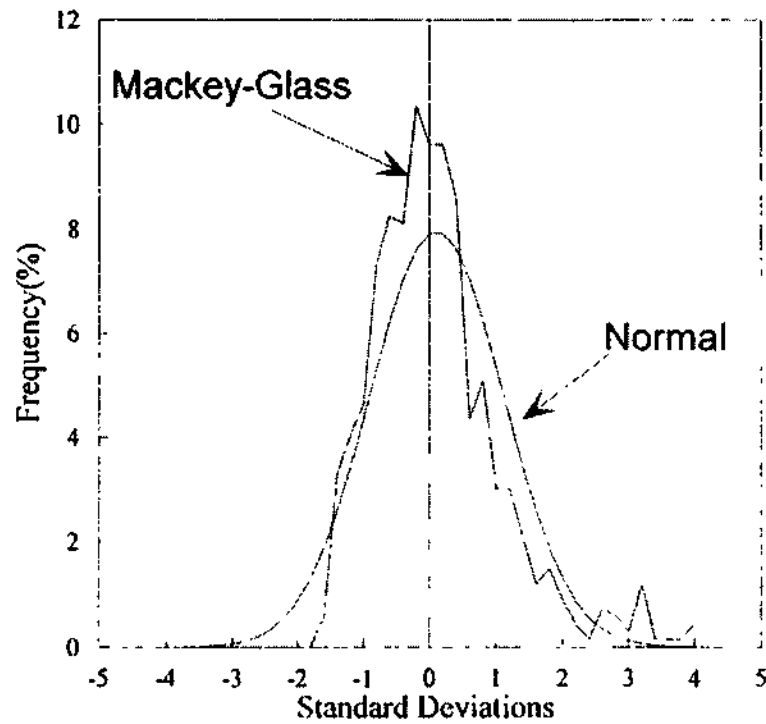


РИСУНОК 17.11 Уравнение Макки-Гласса, выборка производилась через каждые три интервала: без шума.

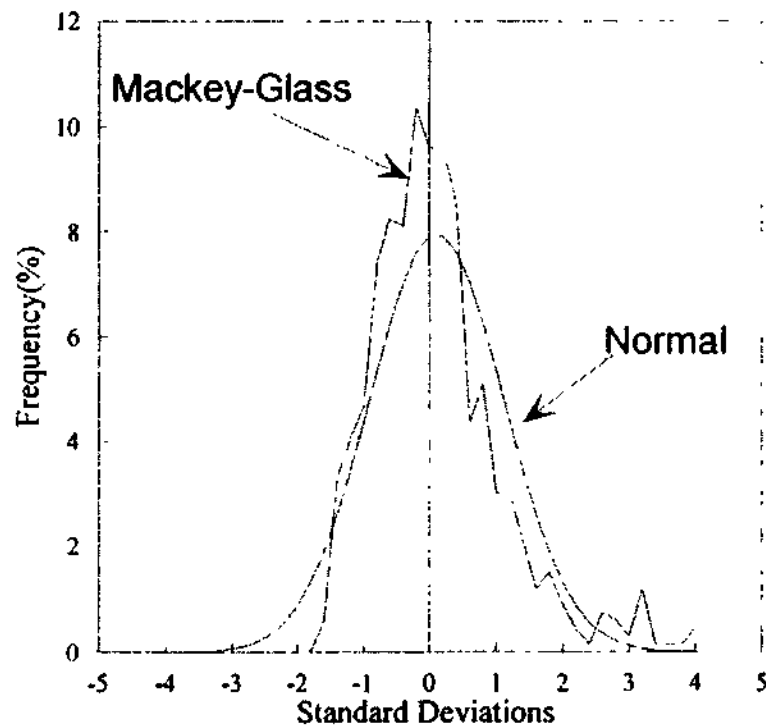


РИСУНОК 17.12 Уравнение Макки-Гласса, выборка производилась через каждые три интервала: наблюдаемый шум.

Однако детерминированный элемент очевиден только на очень длинных частотах. На более коротких интервалах доминирует стохастический элемент. В следующем разделе я попытаюсь свести эти два, казалось бы, конкурирующих понятия, так же как и понятие семейства распределений ARCH, в одно собирательное понятие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: ОБЪЕДИНЕНИЕ GARCH, FBM И ХАОСА

Решение не было получено математическим путем, но мы можем видеть то, что нам необходимо. В краткосрочной перспективе нам нужны персистентные показатели Херста и самоподобные частотные распределения. В долгосрочной перспективе нам нужны персистентные показатели Херста, долгая конечная память и непериодические циклы. Важно помнить, что короткие циклы на основании проведенного нами исследования не кажутся устойчивыми. Только длинный цикл последователен и устойчив во всех изученных периодах времени.

Имея в виду эти результаты, я хотел бы предложить следующее для рынков акций и облигаций. В краткосрочной перспективе на рынках доминируют процессы торговли, которые являются дробными шумовыми процессами. В местном масштабе они являются членами семейства ARCH-процессов и характеризуются условными дисперсиями; то есть каждый инвестиционный горизонт характеризуется своим собственным измеримым процессом ARCH с конечной, условной дисперсией. Эта конечная условная дисперсия может использоваться для оценки риска только для этого инвестиционного горизонта. В глобальном масштабе данный процесс является устойчивым (фрактальным) распределением Леви с бесконечной дисперсией. По мере увеличения инвестиционного горизонта он приближается к поведению бесконечной дисперсии.

В очень долгосрочной перспективе (периоды более четырех лет для американских рынков акций и облигаций) рынки характеризуются детерминированными нелинейными системами или детерминированным хаосом. Непериодические циклы возникают из взаимозависимости различных рынков капитала между собой, а также из экономики. Рынки, на которых доминируют, прежде всего, трейдеры, при этом связь с флуктуациями основополагающей экономики отсутствует, не будут характеризоваться детерминированным хаосом, даже в долгосрочной перспективе. Вместо этого на них будут доминировать местные ARCH-эффекты и глобальные устойчивые характеристики Леви.

Благодаря такому выводу мы можем согласовать различные подходы, которые, как было независимо обнаружено, производят значимые результаты: ARCH, устойчивый Леви (фрактальный) и долгосрочный детерминированный хаос. Вклад каждого процесса зависит от инвестиционного горизонта. Краткосрочный трейдинг находится во власти местного ARCH и глобального фрактала. Долгосрочный трейдинг связан с фундаментальной информацией и детерминированными нелинейностями. Таким образом, информационное множество, используемое для стратегии моделирования, в значительной степени зависит от инвестиционного горизонта.

Понимание рынков

Эта книга имела две цели. Во-первых, я планировал ее как руководство по применению R/S-анализа к рынку капитала, экономическим данным и данным других временных рядов. R/S-анализ существует уже в течение более 40 лет. Несмотря на его устойчивость и общую применимость, он остается в значительной степени неизвестным. Он заслуживает места в комплекте инструментов любого аналитика наряду с другими инструментами, которые были разработаны в традиционном анализе и анализе хаоса.

Моя вторая цель заключалась в описании общей гипотезы для синтеза различных моделей в когерентное целое. Эта гипотеза должна была согласовываться с эмпирическими фактами, используя минимальное количество основополагающих предположений. Я назвал свою модель гипотезой фрактального рынка (ФМН). Я полагаю, что эта гипотеза является первой попыткой разобраться в глобальной структуре рынков. Со временем ФМН будет, несомненно, видоизменена и усовершенствована, если она выдержит тщательную проверку инвестиционного сообщества. Я использовал несколько различных методов проверки ФМН; выдающимся инструментом был R/S-анализ, используемый в комбинации с другими методами.

Стала появляться убедительная картина. R/S-анализ и гипотеза фрактального рынка вместе появились под общим заголовком "фрактальный анализ рынка". Фрактальный анализ рынка использовал самоподобные распределения вероятности, называемые устойчивыми распределениями Леви, в сочетании с R/S-анализом для изучения и классификации долгосрочного поведения рынков.

Мы очень многое узнали, но остается еще многое исследовать. Я убежден, что рынки имеют фрактальную структуру. Как и в отношении любой другой фрактальной, временной или пространственной структуры, чем тщательнее мы исследуем структуру, тем больше деталей мы видим. Как только мы начинаем объяснять некоторые загадки, обнаруживаются новые неизвестные. Перед нами классический пример того, что чем больше мы знаем, тем больше мы понимаем, что мы ничего не знаем.

ИНФОРМАЦИЯ И ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ГОРИЗОНТЫ

Мы обсуждали влияние информации на поведение инвестора. В традиционной теории информация рассматривается как родовое понятие. В большей или меньшей степени, она представляет собой все, что может затронуть воспринимаемую ценность ценной бумаги. Инвестор также является родовым понятием. В основном, инвестор – это любой, кто хочет купить, продать или держать ценную бумагу на основании

доступной информации. Инвестор также считается рациональным – то есть кем-то, кто всегда хочет максимизировать прибыли и знает, как оценивать текущую информацию. Совокупный рынок является эквивалентом такого исходного рационального инвестора, так что рынок может немедленно оценивать информацию. Такой родовой подход, где информация и инвесторы являются общими случаями, также подразумевает, что все виды информации влияют на всех инвесторов одинаково. Вот здесь этот подход и терпит неудачу.

Рынок состоит из многих индивидуумов со многими различными инвестиционными горизонтами. Поведение дэйтрейдера существенно отличается от поведения пенсионного фонда. В первом случае инвестиционный горизонт измеряется в минутах; в последнем случае – в годах.

Информация оказывает различное воздействие на различные инвестиционные горизонты. Основная деятельность дэйтрейдеров – торговля. Торговля обычно связана с поведением толпы и рассмотрением краткосрочных трендов. Дэйтрейдер будет более заинтересован технической информацией, что объясняет тот факт, почему многие технические специалисты говорят, что "рынок имеет свой собственный язык". Существует также большая вероятность того, что техники скажут, что фундаментальная информация имеет малую ценность. Большинство техников имеет короткие инвестиционные горизонты, и, в рамках их временного интервала, фундаментальная информация имеет малую ценность. В этом отношении они правы. Технические тренды имеют наибольшее значение для коротких горизонтов.

Наиболее фундаментальные аналитики и экономисты, которые также работают на рынках, имеют длинные инвестиционные горизонты. Они больше склонны иметь дело с экономическим циклом. Фундаментальные аналитики будут расположены думать о том, что технические тренды – это иллюзии, не представляющие пользы для долгосрочных инвесторов. Истинные инвестиционные прибыли могут быть получены только посредством оценки стоимости.

В этой структуре и техники, и фундаменталисты правы для своих определенных инвестиционных горизонтов, поскольку влияние информации в значительной степени зависит от инвестиционного горизонта каждого индивидуума.

СТАБИЛЬНОСТЬ

Стабильность рынка в значительной степени является вопросом ликвидности. Ликвидность доступна, когда рынок состоит из многих инвесторов со многими различными инвестиционными горизонтами. Таким образом, если поступает порция информации, которая вызывает серьезное снижение в цене в коротком инвестиционном горизонте, на рынок придут долгосрочные инвесторы, чтобы осуществить покупку, поскольку они не оценивают информацию так высоко. Тем не менее, когда рынок теряет эту структуру, и все инвесторы имеют один и тот же инвестиционный горизонт, рынок становится нестабильным, поскольку нет ликвидности. Ликвидность – это не то же самое, что и объем торговли. Это, напротив, балансирование спроса и предложения. Потеря долгосрочных инвесторов заставляет

Часть 5. Шумовой хаос

весь рынок торговать, основываясь на одном и том же информационном множестве, которое, прежде всего, является техническим, или на явлении поведения толпы. Как правило, рыночный горизонт становится краткосрочным, когда долгосрочная перспектива становится очень неопределенной – то есть, когда происходит некоторое событие (часто политическое), которое делает текущее долгосрочное информационное множество ненадежным или воспринимаемым как бесполезное. Долгосрочные инвесторы или прекращают участвовать, или становятся краткосрочными инвесторами и начинают торговать также на основании технической информации.

Рыночная стабильность полагается на разнообразие инвестиционных горизонтов участников. Стабильный рынок – это тот рынок, на котором многие инвесторы с различными инвестиционными горизонтами торгуют одновременно. Рынок устойчив, потому что различные горизонты оценивают информационный поток по-разному и могут обеспечить ликвидность, если происходит крах или паническое изъятие вкладов в одном из других инвестиционных горизонтов.

РИСК

Каждый инвестиционный горизонт похож на поколение ответвлений дерева. Диаметр любой ветви – случайная функция с конечной дисперсией. Однако каждая ветвь, взятая в контексте всего дерева, является частью глобальной структуры с неизвестной дисперсией, потому что размерность каждого дерева различна. Это зависит от многих переменных, таких как его вид и размер.

Каждый инвестиционный горизонт также является случайной функцией с конечной дисперсией, зависящей от предыдущей дисперсии. Поскольку риск в каждом инвестиционном горизонте должен быть одинаковым, при внесении поправки на масштаб форма частотного распределения прибылей одинакова. Однако общая, глобальная статистическая структура рынка имеет бесконечную дисперсию; долгосрочная дисперсия не стремится к устойчивому значению.

Глобальная статистическая структура фрактальна, поскольку она имеет самоподобную структуру, и ее характеристический показатель α (который также представляет собой фрактальную размерность) является дробным, варьируясь в пределах от 0 до 2. Случайное блуждание, которое характеризуется нормальным распределением, самоподобно. Однако оно не фрактально; его фрактальная размерность – целое число: $\alpha = 2,0$.

Форма этих фрактальных распределений в сравнении с нормальным распределением характеризуется высоким пиком и толстыми хвостами. Толстые хвосты имеют место, поскольку крупное событие происходит в результате процесса усиления. Тот же самый процесс вызывает бесконечную дисперсию. Хвосты никогда не стремятся к асимптоте $y = 0,0$, даже в бесконечности. Кроме того, когда происходят большие события, они имеют тенденцию быть резкими и прерывистыми. Таким образом, фрактальные распределения имеют еще одну фрактальную характеристику: прерывистость. Тенденция к "катастрофам" была названа Мандельбротом

(Mandelbrot, 1972), *эффектом Ноя*, или, более формально, синдромом бесконечной дисперсии. На рынках толстые хвосты вызываются крахами и паническими бегствами, которые имеют тенденцию быть резкими и прерывистыми, как предсказано моделью.

ДОЛГОВРЕМЕННАЯ ПАМЯТЬ

В идеальном мире традиционного анализа временных рядов все системы являются случайными блужданиями или могут быть преобразованы в случайные блуждания. В таком случае может быть применен "высший закон Неразумности", и могут быть найдены ответы. Вследствие такого наложения порядка на беспорядок естественные системы могут быть сведены к нескольким разрешимым уравнениям и одному основному частотному распределению – нормальному распределению.

Реальная жизнь не так проста. Дети Демиурга сложны и не могут быть классифицированы в соответствии с несколькими простыми характеристиками. Мы нашли, что на рынках капитала большинство рядов характеризуется эффектами долговременной памяти, или смещениями; сегодняшняя рыночная деятельность смещает будущую деятельность на очень долгое время. Подобный *эффект Иосифа* может вызвать серьезные проблемы для традиционного анализа временных рядов; например, эффект Иосифа очень сложно, если не невозможно, отфильтровать. AR(1)-разности, самый распространенный метод для устранения сериальной корреляции, не могут удалить эффекты долговременной памяти. Долговременная память вызывает появление трендов и циклов. Эти циклы могут быть ложными, поскольку они являются просто функцией эффекта долговременной памяти и случайного изменения в смещении рынка.

Посредством R/S-анализа было показано, что такой эффект долговременной памяти существует и является процессом черного шума. Цвет шума, который вызывает эффект Иосифа, будет важен далее, когда мы будем обсуждать волатильность.

ЦИКЛЫ

Долгое время существовало подозрение, что рынки имеют циклы, но убедительных доказательств не было обнаружено. Используемые методы искали правильные, периодические циклы – то есть циклы, созданные Благом. Демиург создал непериодические циклы – циклы, которые имеют средний, но не точный период. Используя R/S-анализ, мы смогли показать, что непериодические циклы вероятны для рынков. Такие непериодические циклы длятся в течение многих лет, так что существует вероятность того, что они являются последствием долгосрочной экономической информации. Мы нашли, что подобные непериодические циклы существуют для нелинейных динамических систем, или детерминированного хаоса.

Мы не нашли убедительного доказательства краткосрочных непериодических циклов. Большинство более коротких циклов, которые популярны среди техников, происходят, вероятно, вследствие эффекта Иосифа. Циклы не имеют средней длины,

Часть 5. Шумовой хаос

и смещение, которым они вызваны, может измениться в любое время – наиболее вероятно, резким и прерывистым образом.

Среди более интересных результатов можно выделить тот факт, что валюта не имеет долгосрочного цикла. Это подразумевает, что она представляет собой дробный шумовой процесс и в краткосрочной, и в долгосрочной перспективе. Акции и облигации, с другой стороны, являются дробным шумом в краткосрочной перспективе (отсюда самоподобные частотные распределения), но хаотичны в долгосрочной перспективе.

ВОЛАТИЛЬНОСТЬ

Было показано, что волатильность антиперсистентна – это часто изменяющийся процесс розового шума. Однако она не является возвратной к среднему. Возвратность к среднему подразумевает, что волатильность имеет устойчивое математическое ожидание, к которому в конечном счете стремится. Мы видели доказательства того, что это не так. Эти доказательства согласуются с теорией, поскольку производной процесса черного шума является розовый шум. Рыночные прибыли представляют собой черный шум, так что не удивительно, что волатильность (которая является вторым моментом курсов акций) является розовым шумом.

Процесс розового шума характеризуется функциями вероятности, которые не только имеют бесконечную дисперсию, но также и бесконечное среднее; то есть не существует математического ожидания, к которому можно возвратиться. В контексте того представления, что рыночные прибыли являются черным шумом, это имеет смысл. Если рыночные прибыли имеют бесконечную дисперсию, то среднее дисперсии курсов акций само должно быть бесконечным. Это все является частью одной большой структуры, и эта структура имеет глубокие последствия для опционных трейдеров и других индивидуумов, покупающих и продающих волатильность.

К БОЛЕЕ ПОЛНОЙ РЫНОЧНОЙ ТЕОРИИ

Большая часть обсуждений в этой книге была попыткой согласовать рациональный подход традиционного количественного управления с практическим опытом фактического взаимодействия с рынками. В течение некоторого времени мы не могли привести их в соответствие. Практикующие менеджеры по регулированию денежных операций, которые имеют количественный опыт, вынуждены прививать практический опыт к теории. Когда практика не соответствует теории, мы просто признавали, что в этой точке теория терпит неудачу. Наша точка зрения была подобна принятию физиками "сингулярностей", то есть событий, где теория терпит неудачу. Большой взрыв – одна из таких сингулярностей. В момент Большого взрыва физические законы терпят неудачу и не могут объяснить это событие. Мы были вынуждены думать о рыночных крахах, как о сингулярностях теории рынка капитала. Они представляют собой периоды, когда не действует никакое обобщение гипотезы эффективного рынка (EMH).

Теория хаоса и фрактальная статистика предлагают нам модель, которая может объяснить такие особенности. Даже если события, такие как аварии, оказываются непредсказуемыми, они не неожиданны. Они не становятся "выбросами" в теории. Наоборот, они – часть системы. Во многом они являются той ценой, которую мы платим за то, чтобы быть капиталистами. В моей предыдущей книге, я отметил, что для того чтобы остаться живыми, рынки должны быть далеки от равновесия. Я пытался сказать, что капиталистическая система (либо рынок капитала, либо вся экономика) должна динамически развиваться. Случайные события должны происходить, чтобы стимулировать новшества. Если бы мы точно знали, что должно произойти, мы бы *перестали* экспериментировать. Мы перестали бы учиться. Мы перестали бы вводить новшества. Поэтому у нас должны быть циклы, а циклы подразумевают, что всегда будет период подъема и период спада.

Для исследователей стал обычным поиск аномалий, или карманов неэффективности, где можно получить прибыль при небольшом риске. Было справедливо указано, что большой рынок будет устранять такие аномалии, как только они становятся общеизвестными. ФМН не такая. Она не находит карман неэффективности, в котором немногие могут получить прибыль. Вместо этого, она говорит о том, что, поскольку информация на различных частотах обрабатывается по-разному, тренды и циклы будут на всех инвестиционных горизонтах. Некоторые будут стохастическими, некоторые будут нелинейными детерминированными. В обоих случаях точная структура трендов изменяется во времени. Она предсказуема, но она никогда не будет совершенно предсказуема, и именно это сохраняет рынки устойчивыми. Теория хаоса и фрактальная статистика предлагают нам новый способ понимания того, как функционируют рынки и экономики. Нет никаких гарантий того, что благодаря им нам будет легче зарабатывать деньги. Тем не менее, мы будем более приспособлены к разработке стратегий и оценке рисков.

Приложение 1

Игра хаоса

В этом приложении приводится программа BASIC, которая генерирует треугольник Серпинского, используя алгоритм игры хаоса, описанный в Главе 1. В моей предыдущей книге я привел ряд программ BASIC, но позже получил жалобы на то, что программы не работают. Проблема заключается в том, что есть много различных форм BASIC для ПК. Эта версия называется BASICA и раньше предоставлялась компанией Microsoft вместе с их программным обеспечением DOS. Я все еще использую этот язык для иллюстративных целей. Если у вас есть доступ к другой версии BASIC, эту программу нужно будет обновить.

К счастью, она очень короткая. Это тем более замечательно, если учесть, каким сложным является получаемое изображение, и убедительно показывает, как случайность и детерминизм могут сосуществовать. Экран, используемый здесь, имеет формат 640 X 200 пикселей. Сначала программа запрашивает x и координаты для начала программы. Вы можете ввести фактически любое число. Алгоритм быстро сводится к треугольнику Серпинского. Поскольку программа не наносит первые 50 точек (они считаются "переходными процессами"), изображение будет сгенерировано, так или иначе. Измените исходные координаты, и вы увидите, что каждый раз в результате получается одно и то же изображение, несмотря на произвольный порядок, в котором расставляются точки. Во многих отношениях данная программа будет более впечатляющей на более медленном ПК, на котором вы сможете видеть, как изображение будет постепенно появляться.

Координаты трех углов треугольника в система обозначений (x, y) – $(320, 1)$, $(1, 200)$ и $(640, 200)$. После считывания исходной точки, программа генерирует случайное число r от 0 до 1. Мы используем это случайное число

Приложение 1

вместо бросания кости, описанного в Главе 1. Если r меньше 0,34, программа проходит половину расстояния от текущего положения до точки (320, 1), которая является вершиной треугольника. Если $0,33 < r < 0,67$, она проходит половину расстояния до точки (1, 200), левого нижнего угла. Если $0,68 < r < 1,00$, то она проходит половину расстояния до точки (640, 200), нижнего правого угла. В каждом случае, она ставит точку, генерирует другое случайное число и затем начинает все сначала. Программа написана для 50 000 итераций. Пользователь может использовать больше или меньше. Однако я нашел, что больше 50 000 итераций заполняют треугольник из-за недостатка разрешения, а меньше 50 000 итераций оставляют несколько неполное изображение.

```
10 Screen 2 @640X200 pixel screen@
20 Cls: Key off
30 Print "Input x and co-ordinates: "
40 Print "Input x: " : Input x
50 Print "Input y: " : Input y
60 cls
70 For i = 1 to 50000 @number of plotted points@
80 r = rnd(i) @generate random number@
90 If r<0.34 then x = x(x + 320) /2 else if r<0 . 67 then x=(x+1)/2
   else x= (x+640)/2
100 If r<0.34 then y = (y + 1) /2 else y=(y + 200)/2
110 if i<50 goto 130 @skip plotting first 50 points@ 120
   pset(x,y) @plot point@
130 next i
140 end
```

Приложение 2

Программы на языке GAUSS

В книге *"Хаос и порядок на рынках капитала"* я привел несколько программ на языке BASIC, так что читатели могли экспериментировать с вычислением корреляционных размерностей и показателей Ляпунова. Я с удивлением обнаружил, что некоторые читатели предполагали, что я провел большую часть моего исследования с использованием BASIC, и, по некоторым причинам, это понизило его достоверность. Хотя я и не думаю, что есть что-то плохое в использовании BASIC, я, тем не менее, использую и другие языки для более сложных манипуляций с данными. Мой текущий выбор – язык GAUSS, созданный компанией Aptech Systems в Сиэтле, штат Вашингтон. GAUSS – язык программирования высокого уровня, который я нахожу очень эффективным для работы с большими файлами данных. В работе *"Хаос и порядок на рынках капитала"* я не привел программу для вычисления нормированного размаха, поскольку я думал, что версия BASIC будет очень эффективной, и я был неуверен, насколько широко использовался язык GAUSS среди предполагаемой аудитории той книги. По замыслу эта книга является более технической, и кажется разумным привести здесь мои программы на языке GAUSS.

Программы приведены в их самом основном формате. Пользователи должны будут настроить их для своих прикладных систем. В данном приложении содержатся программы для вычисления R/S , $E(R/S)$, последовательного стандартного отклонения и среднего, а также временной структуры волатильности. Обычно я беру результат этих программ и ввожу его в электронную таблицу для графического представления и непосредственной обработки. Я предпочитаю электронные таблицы из-за мгновенной обратной связи, которую я получаю в процессе преобразований. Однако тот способ, которым пользователь решает обрабатывать результат является исключительно вопросом личного предпочтения.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМИРОВАННОГО РАЗМАХА

Программа R/S-анализа может либо считывать информацию из файла данных на языке GAUSS, либо импортировать файл ASCII. Она разбивает набор данных на четные приращения, которые используют и начальные, и конечные точки, как описано в Главе 4. Следовательно, вы должны выбрать такие длины данных, которые имеют больше всего делителей. Если Вы вводите 499 наблюдений, вы не получите результат. Программа в ее текущей форме берет сырой файл данных (например, цен) и сначала вычисляет логарифмические разности. Затем она проводит AR(1) анализ и берет разность. Ряд данных AR(1)-разностей передается далее в раздел R/S-анализа программы. Таким образом, для перехода в раздел R/S-анализа входной файл должен иметь на два наблюдения больше, чем вы хотите. Если вы хотите провести анализ для $i = 500$ наблюдений, вы должны ввести 502 цены.

Программа выводит $\log(R/S)$ и $\log(i)$ для AR(1)-разностей и размещает их в файле ASCII, который называется *dlyarl.asc*. Файл ASCII можно переименовать и использовать в качестве входных данных для любого пакета, который вы используете для графического представления и регрессии. V-статистика рассчитывается из этого выходного файла. Как я уже говорил, я предпочитаю делать это в крупноформатной электронной таблице.

Входной файл может быть либо набором данных на языке GAUSS, либо файлом ASCII. Набор данных на языке GAUSS, который используется здесь, представляет собой длинный ряд ежедневного индекса Доу-Джонса для акций промышленных компаний, использовавшийся на протяжении всей книги. Для более коротких файлов из других источников я использую формат ASCII. Входной файл ASCII называется *prices.prn*.

```
@This opening section (which has been REM'd out) reads a GAUSS
dataset.@
  @Open ex = djal.dat ;
  p = seekr (ex,1) ;
  sret = readr (ex, 27002) ;
  datr=sret [.,1] ;@

  @This section reads an ASCII file as input@
  load sret [] = prices.prn;
  datx = sret [.,1];
  datr=datx;

  @calculate number of observations to the lower 100 + 2@
  obv= (int((rows(datr)-1)/100)*100)+2;

  @Calculate the log returns@
  datn= (ln(datr [2:obv]. / datr[1:obv-1]))
  obv = obv-1 ;
```

```

@Take AR(1) residuals@
yi=datn[2:obv] ; xi=datn[1:obv-1] ; xi2=xi^2;
ybar=meanc (yi); xbar=meanc (xi);
xy=yi.*xi ; sxx = obv*sumc (xi2) - (sumc(xi))^2 ;
sxy=obv* (sumc(xy)) -sumc (xi) *sumc (yi);
slope = sxy/sxx; const=ybar-slope*xbar;
datx = datn [2:obv] - (const+slope *datn [1:obv-1]);
clear datn; obv = rows (datx);
@Calculate R/S@

I = 9; @Starting value of number of observations for R/S
calculation@

do while i<obv-1;
i=i+1; n= floor (obv/i); num= (obv/i);
if n<num; goto repeat: endif; @This section checks whether we
have an even increment of time. If not, we skip to the next
i.@
x1 = reshape (datx',n,i)'; @time series is reformatted into
n X i matrix, to calculate R/S for periods of length i.@
mu = meanc (x1)'; x1 = x1-mu; @sample mean is
calculated and subtracted@
sig = stdc (x1); @sample standard deviations@
sum=cumsumc (x1); @cumulative deviations from mean@
max=maxc (sum); min = minc (sum); @maximum and minimum
deviations from mean@
r=max-min; @range calculation@
rs = r./sig; @rescaled range@
a = log (meanc (rs)); b=log(i); @log of the average R/S value,
and number of observations,
i@

@Print to File@
printdos "\27[=6h";
c = a ~ b;
output file = dlyar1.asc on;
print c ;

repeat:endo;

```

ВЫЧИСЛЕНИЕ E(R/S)

Данная программа вычисляет ожидаемое значение R/S для гауссовых приращений, используя методологию, описанную в Главе 5. В начале есть стартовое значение для числа наблюдений n и конечное значение e . Подобно программе для вычисления R/S, эта программа вычисляет E(R/S) для всех четных приращений между n и e . На практике я провожу R/S на фактических данных, а затем выполняю эту программу для E(R/S), изменяя e на общее число наблюдений, используемых для R/S, давая, таким образом, эквивалентные значения. Это можно изменить, и характерные значения в Таблице A2.1, которая следует за этим приложением, были рассчитаны также с помощью этой программы.

Результат содержится в файле ASCII, который называется em.asc. Он содержит два столбца, E(R/S) и число наблюдений n . На этот раз логарифмы не берутся, хотя программу можно легко изменить, чтобы она это делала. В вычислении мы используем уравнение (5.4) до тех пор, пока n меньше 335. В этой точке большинство ПК не выдерживает достаточного количества разрядов для гамма-функций, и программа переходит к уравнению (5.5), которое использует приближение Стерлинга.

```
n=9; e=1000; @beginning and ending observation numbers@

do while n<e; n=n+1;
i = floor (e/n); num=(e/n); if i<num; goto repeat; endif;

if n< 335;
g = gamma (.5*(n-1))/(gamma(.5*n)*sqrt(pi));
else; g=((.5*n)^(-.5))/sqrt(pi);
endif;

r=0; sum=0;
do while r<n-1;
r=r+1;
sum=sum+sqrt((n-r)/r); @empirical correction@
endo;

em = g*sum; @calculation of E(R/S) using empirical correction@ output file =
em.asc on;

p = n ~ em; print p;

repeat : endo;
```


ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ И СРЕДНЕГО

Программа, которая вычисляет последовательное стандартное отклонение и среднее – просто разновидность той программы, которая вычисляет нормированный размах. Данные непрерывно переформатируются в матрицу $n \times i$, но приращение теперь представляет собой фиксированный шаг длиной r . Вместо нормированного размаха рассчитываются только сигма и среднее. Эта программа использует только первый столбец; она не выводит среднее по всем приращениям длиной i . Наконец, она не берет AR(1)-разности, которые являются излишними для этого вида анализа. Результат – последовательное среднее и сигма, так же как и число наблюдений x .

```

@open ex = djal.dat; p = seekr(ex,1); sret =
readr(ex,27000);
datx = sret[.,1]; obv = rows (datx);@ @GAUSS dataset input
REM'c out@

load sret[] = prices.prn; datx=sret[.,1];
obv = rows(datx);

datr = ln(datx[2:obv] ./ datx [1:obv-1]); @log returns@
obv = rows (datr);

r = 1; x=19; @increments of one observation. start with 20
observations@

do while x<obv-r;
x = x + r; n = floor(obv/x);
x1 = reshape (datr',n,x)'; @reformat data into n by x
matrix@
s = x1[.,1]; v = stdc(s); m = meanc(s); @calculate
sequential sigma and mean@

@print to file@
format 1 8; output file = seqvar.asc on;
print x ~ v ~ m;
endo;

```

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Как и в программе для последовательного среднего и стандартного отклонения, программа вычисления временной структуры волатильности использует большую часть программы R/S-анализа, переформатируя данные как матрицу $n \times i$, где n – временной интервал процента. В этом случае мы начинаем с ежедневных данных, строим вектор цен $27\,002 \times 1$ и вычисляем стандартное отклонение изменений AR(1)-разностей. Затем мы переходим к 2-дневным данным и создаем матрицу цен $13\,502 \times 2$. Столбец 1 теперь содержит цену каждые два дня. Затем мы вычисляем стандартное отклонение изменений AR(1)-разностей столбца 1. Мы продолжаем делать это до тех пор, пока у нас не закончатся данные.

В этом случае мы еще раз используем AR(1)-разности, потому что мы не хотим, чтобы стандартное отклонение более длительных периодов смещалось инфляционным ростом. В более коротких интервалах это не имеет большого значения.

```

@This section reads a GAUSS dataset as input. It has been REM'd out@
  @open ex = djal.dat;
  p=seekr(ex,1);
  sret = readr(ex,27002);
  datr=sret[.,1]; @

  @This section reads an ASCII file as input@
  load sret [] = prices.prn;
  datx=sret[.,]);
obv=((int(rows(datx)/100))*100)+2; @set observations to even 100, +2 for
                                     AR(1) calc@

  datn = datx [2:obv]./datx[1:obv]; @Calculate log returns@ obv = rows
(datn);

```

```

@take AR (1) residuals@
yi=datn [2 : obv];
xi = datn [1 :obv-1]; xi2=xi^2;
ybar=meanc(yi); xbar=meanc (xi);
xy=yj.*xi;
sxx=obv*sumc (xi2) - (sumc (xi))^2;
sxy=obv I ( sumc (xy)) -sumc(xi) *sumc (yi);
slope = sxy/sxx; const =ybar- slope*xbar;
datc = datn [2:obv] - (const + slope*datn [1:obv-1]);
obv = rows (datc);

@cumulate AR (1) residuals@
datx = cumsumc (date [.,1 ]) + 100;

l=0;x=0;

do while x<= (obv/2);
x = x + 1;
num = obv/x; n = floor (obv/x); if n<num; goto repeat;
endif;
    @check if x is evenly divisible@

x1 =reshape (datx',n,x); @reshape matrix to desired investment
                        horizon, "x"@
datn = x1 [.,!];        @use first column of prices only@
datr = ln(datn[2:n]./datnfl :n-1]); @log return@
s = stdc (datr);        @calculate standard deviation@
@print to file@

```

Приложение 2

Таблица A2.1 Ожидаемое значение R/S , гауссова случайная переменная: характерные значения

N	E(R/S)	Log(N)	Log(E(R/S))
10	2,8722	1,0000	0,4582
15	3,7518	1,1761	0,5742
20	4,4958	1,3010	0,6528
25	5,1525	1,3979	0,7120
30	5,7469	1,4771	0,7594
35	6,2939	1,5441	0,7989
40	6,8034	1,6021	0,8327
45	7,2822	1,6532	0,8623
50	7,7352	1,6990	0,8885
55	8,1662	1,7404	0,9120
60	8,5781	1,7782	0,9334
65	8,9733	1,8129	0,9530
70	9,3537	1,8451	0,9710
75	9,7207	1,8751	0,9877
80	10,0758	1,9031	1,0033
85	10,4200	1,9294	1,0179
90	10,7542	1,9542	1,0316
95	11,0793	1,9777	1,0445
100	11,3960	2,0000	1,0568
200	16,5798	2,3010	1,2196
300	20,5598	2,4771	1,3130
400	23,8710	2,6021	1,3779
500	26,8327	2,6990	1,4287
600	29,5099	2,7782	1,4700
700	31,9714	2,8451	1,5048
800	34,2624	2,9031	1,5348
900	36,4139	2,9542	1,5613
1.000	38,4488	3,0000	1,5849
1.500	47,3596	3,1761	1,6754
2.000	54,8710	3,3010	1,7393
2.500	61,4882	3,3979	1,7888
3.000	67,4704	3,4771	1,8291
3.500	72,9714	3,5441	1,8632
4.000	78,0916	3,6021	1,8926
4.500	82,9004	3,6532	1,9186
5.000	87,4487	3,6990	1,9418
5.500	91,7747	3,7404	1,9627
6.000	95,9081	3,7782	1,9819
6.500	99,8725	3,8129	1,9994
7.000	103,6872	3,8451	2,0157
7.500	107,3678	3,8751	2,0309
8.000	110,9277	3,9031	2,0450
8.500	114,3779	3,9294	2,0583
9.000	117,7281	3,9542	2,0709
9.500	120,9864	3,9777	2,0827
10.000	124,1600	4,0000	2,0940

Приложение 3

ТАБЛИЦЫ ФРАКТАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Это приложение имеет две цели:

1. Здесь представлены таблицы, которые некоторые читатели найдут полезным, если они исследуют устойчивые распределения как альтернативные показатели риска, либо для выбора портфеля, либо для опционного ценообразования, как описано в Главе 15.
2. Оно охватывает методологию, используемую для создания таблиц. Текст данного приложения предназначен особенно для тех, кого интересует такая степень детализации.

В 1968 и 1971 гг. Фамэ и Ролл опубликовали функции распределения для семейства устойчивых распределений. Таблицы ограничивались симметричным случаем, где $\beta = 0$. Это были первые таблицы, которые были получены на основе алгоритмов, а не на основе интерполяции как это делал Мандельброт (Mandelbrot, 1963). В этом приложении мы сначала опишем методологию, используемую Фамэ и Роллом. Мы также кратко обсудим другие методы, разработанные начиная с 1971 г. В конце приложения воспроизведены три таблицы из работы Фамэ и Ролла. Теперь стало возможным сгенерировать эти таблицы с использованием мощного программного обеспечения, доступного для персональных компьютеров, так же как и для автоматизированных рабочих мест. Заинтересованные читатели также могут попробовать это сделать.

ГЕНЕРИРОВАНИЕ ТАБЛИЦ

Фамэ и Ролл основывали свою методологию на работе Бергстрема (Bergstrom, 1952). Чтобы осуществить расширение Бергстрема, мы должны начать со *стандартизированной* переменной:

$$u = \frac{x - \delta}{c} \tag{A3.1}$$

Распределение u – устойчивый эквивалент стандартного нормального распределения, которое имеет среднее, равное 0, и стандартное отклонение, равное 1.

Приложение 3

Разница заключается в том, что устойчивое распределение имеет среднее 0 и $c = 1$. Обычно мы нормализуем временной ряд, вычитая выборочное среднее и осуществляя деление на стандартное отклонение. Стандартизированная форма устойчивого распределения, по существу, является такой же. δ – среднее распределения. Тем не менее, вместо деления на стандартное отклонение, мы делим на параметр масштабирования c . Вспомните из Главы 14, что дисперсия нормального распределения равна $2 \cdot c^2$. Следовательно, стандартизированное устойчивое распределение, где $\alpha = 2,0$, не будет таким же, как стандартное нормальное распределение, поскольку коэффициент масштабирования будет другим. Устойчивое распределение изменяет масштаб на половину дисперсии нормального распределения. Мы начинаем со стандартизированной переменной, потому что ее логарифмическая характеристическая функция может быть упрощена следующим образом:

$$\log_e \phi_u(t) = -|t|^\alpha \quad (\text{A3.2})$$

Как мы говорили в Главе 14, явные выражения для устойчивых распределений существуют только для частных случаев нормальных распределений и распределений Коши. Однако Бергстром (Bergstrom, 1952) разработал разложение в ряд, которое Фамэ и Ролл использовали для приближения плотностей для многих значений альфы. Когда $\alpha > 1,0$, они могли использовать результаты Бергстрема для выведения следующего сходящегося ряда:

$$f_\alpha(u) = \frac{1}{\pi \cdot \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k * \frac{\Gamma\left(\frac{2 \cdot k + 1}{\alpha}\right)}{(2 \cdot k)!} * u^{2 \cdot k} \quad (\text{A3.3})$$

В действительности с бесконечным рядом трудно работать. К счастью, Бергстром также привел эквивалент конечного ряда для уравнения (A3.3), который мог использоваться, когда $\alpha > 1$. Для $u > 0$ это дает:

$$f_\alpha(u) = -\frac{1}{\pi} * \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} * \frac{\Gamma(\alpha \cdot k + 1)}{u^{\alpha \cdot k + 1}} * \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \alpha}{2}\right) + R(u) \quad (\text{A3.4})$$

$R(u)$, остаток, является функцией $u^{-\alpha \cdot (n+1) - 1}$. То есть для константы M :

$$|R(u)| < M * u^{-\alpha \cdot (n+1) - 1} \quad (\text{A3.5})$$

По мере того как u становится больше, остаток $R(u)$ становится меньше, чем предыдущий член в суммировании. Уравнение (A3.4) является асимптотическим для большого u .

Почленное интегрирование уравнения (A3.3) дает сходящийся ряд для функции распределения стандартизированной, симметричной устойчивой переменной с $\alpha > 1$:

$$F_{\alpha}(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi * \alpha} * \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k * \frac{\Gamma\left(\frac{2 * k - 1}{\alpha}\right)}{(2 * k - 1)!} * u^{2 * k - 1} \quad (A3.6)$$

Подобным образом интегрирование уравнения (A3.4) также приводит к следующему асимптотическому ряду для большого u :

$$F_{\alpha} = 1 + \frac{1}{\pi} * \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k * \frac{\Gamma(\alpha * k)}{k! * u^{\alpha * k}} * \sin\left(\frac{k * \pi * \alpha}{2}\right) - \int_u^{\infty} R(u) du \quad (A3.7)$$

Интеграл остаточного члена $R(u)$ будет стремиться к нулю в пределе.

Практически, Фамэ и Ролл использовали уравнения (A3.6) и (A3.7) при вычислении функций распределения. Подход состоял в том, чтобы использовать уравнение (A3.6) для небольшого u и уравнение (A3.7) для большого u . Однако на практике они нашли, что оба уравнения согласуются до пяти десятичных знаков, за исключением того случая, когда α была близка к 1. Для α близкой к 1 они использовали уравнение (A3.7), когда $|u| > -4 + 5 * \alpha$, и уравнение (A3.6) во всех других случаях.

Наконец, Фамэ и Ролл дали следующую итерационную процедуру для определения $u(\alpha, F)$, которую я привожу здесь полностью:

1. Сделайте первое приближение Z к $u(\alpha, F)$, взяв взвешенное среднее значение F квантилей распределений Коши и гауссовых распределений.
2. Если $|Z| > -4 + 5 * \alpha$, скорректируйте его, используя полиномиальную инверсию первых четырех членов из конечного ряда.
3. Повторите следующим образом:

(а) Вычислите $F - F_{\alpha}(Z)$.

(б) Измените Z согласно:

$$\Delta Z = \frac{F - F_{\alpha}(Z)}{d}$$

где d – взвешенное среднее значение плотностей Коши и Гаусса, определенных в точке Z .

(с) Вернитесь к (а) и повторяйте процесс до тех пор, пока $F - F_{\alpha}(Z) < 0,0001$. Процедура редко требует больше трех итераций

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ

Существуют и другие методы вычисления устойчивых распределений, которые не так хорошо документально зафиксированы. Маккаллох (McCulloch, 1985) кратко описал их. Он сослался на интегральное представление, данное Золотаревым (Zolotarev, 1966), в дополнение к представлению сходящегося ряда Бергстрёма

Приложение 3

(Bergstrom, 1952), использованного Фамэ и Роллом.

Кроме того, Дюмушель очевидно представил распределения в виде таблицы в своей неопубликованной докторской диссертации в 1971 г. Мне не удалось получить копию тех таблиц, но я все же нашел описание методологии Дюмушеля в более поздней работе (1973). Дюмушель воспользовался тем фактом, что обратное преобразование Фурье характеристической функции ведет себя подобно плотности распределения. Для $0 < x < 10$ он инвертировал характеристическую функцию (уравнение (A3.2)), используя быстрое преобразование Фурье (БПФ), и вычислил плотности в числовой форме. Для областей хвостов, $x > 10$, он использовал уравнение (A3.7), также как сделали Фамэ и Ролл. Наряду с тем, что такое вычисление легче провести, результаты должны быть подобны результатам Фамэ и Ролла (Fama and Roll, 1971).

Символические языки, теперь доступные для ПК – например, Mathcad, Matlab и Mathematica – должны сделать осуществление метода Дюмушеля довольно понятным. Существуют и другие таблицы. Холт и Кроу (Holt and Crow, 1973) свели в таблицу функции плотности вероятности (в противоположность функциям распределения Фамэ и Ролла) для различных значений α и β . Если вас интересует эти таблицы, обратитесь к их работе.

ОПИСАНИЕ ТАБЛИЦ

Таблица A3.1 – функция распределения для стандартизированных, симметричных ($b = 0$) устойчивых распределений. Она охватывает диапазон от 1,0 до 2,0. Частотное распределение для стандартизированных значений может быть найдено через вычитание, также как и для стандартной нормальной функции распределения (которую можно найти во всех книгах по статистике). Хотя $\alpha = 2,0$ сопоставима с нормальным распределением, эти таблицы не будут согласовываться, потому что они стандартизированы к s , а не к σ , как мы говорили ранее.

Таблица A3.2 преобразовывает результаты Таблицы A3.1 в квантили. Чтобы узнать, какое значение F объясняет 99 процентов наблюдений для $\alpha=1,0$, опуститесь по столбцу F влево к 0,99 и поперек к значению $u=31,82$. Распределение Коши требует наблюдений 31,82 значений s от среднего, чтобы охватить 99 процентов вероятности. Напротив, нормальный случай достигает 99-процентного уровня при $u=3,29$. Это отличается от стандартного нормального случая, который составляет 2,326 стандартных отклонений, а не 3,29 единиц s .

В Таблице A3.3 приводятся дальнейшие подробности квантилей для $0,70 \leq F \leq 0,75$, которое используется в Главе 15, чтобы определить s для оценки опционов.

Таблица А3.1 Функции распределения для стандартизованных симметричных устойчивых распределений, $F(u)$

u	Альфа (α)											
	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	1,95	2,00
0,05	0,5159	0,5153	0,5150	0,5147	0,5145	0,5144	0,5143	0,5142	0,5142	0,5141	0,5141	0,5141
0,10	0,5371	0,5306	0,5299	0,5294	0,5290	0,5287	0,5285	0,5284	0,5283	0,5282	0,5282	0,5282
0,15	0,5474	0,5458	0,5447	0,5439	0,5434	0,5430	0,5427	0,5425	0,5424	0,5423	0,5423	0,5422
0,20	0,5628	0,5608	0,5594	0,5584	0,5577	0,5572	0,5568	0,5566	0,5564	0,5563	0,5563	0,5562
0,25	0,5780	0,5756	0,5740	0,5728	0,5719	0,5713	0,5709	0,5706	0,5704	0,5702	0,5702	0,5702
0,30	0,5928	0,5902	0,5883	0,5869	0,5860	0,5853	0,5848	0,5844	0,5842	0,5841	0,5840	0,5840
0,35	0,6072	0,6044	0,6024	0,6009	0,5998	0,5991	0,5985	0,5982	0,5979	0,5978	0,5978	0,5977
0,40	0,6211	0,6183	0,6162	0,6146	0,6135	0,6127	0,6122	0,6118	0,6115	0,6114	0,6114	0,6114
0,45	0,6346	0,6318	0,6297	0,6281	0,6270	0,6262	0,6256	0,6252	0,6250	0,6249	0,6248	0,6248
0,50	0,6476	0,6449	0,6428	0,6413	0,6402	0,6394	0,6389	0,6385	0,6383	0,6382	0,6382	0,6382
0,55	0,6601	0,6576	0,6557	0,6542	0,6532	0,6524	0,6519	0,6516	0,6514	0,6513	0,6513	0,6513
0,60	0,6720	0,6698	0,6681	0,6668	0,6658	0,6651	0,6647	0,6644	0,6643	0,6643	0,6643	0,6643
0,65	0,6835	0,6817	0,6802	0,6790	0,6782	0,6776	0,6772	0,6770	0,6770	0,6770	0,6770	0,6771
0,70	0,6944	0,6930	0,6919	0,6909	0,6902	0,6898	0,6895	0,6894	0,6894	0,6895	0,6896	0,6897
0,75	0,7048	0,7039	0,7031	0,7025	0,7020	0,7017	0,7015	0,7015	0,7016	0,7018	0,7019	0,7021
0,80	0,7148	0,7144	0,7140	0,7136	0,7134	0,7133	0,7133	0,7134	0,7136	0,7139	0,7140	0,7142
0,85	0,7242	0,7244	0,7244	0,7244	0,7244	0,7245	0,7247	0,7250	0,7253	0,7257	0,7259	0,7261
0,90	0,7333	0,7340	0,7345	0,7348	0,7351	0,7355	0,7358	0,7363	0,7367	0,7372	0,7375	0,7377
0,95	0,7418	0,7432	0,7441	0,7449	0,7455	0,7461	0,7467	0,7472	0,7479	0,7485	0,7488	0,7491
1,00	0,7500	0,7519	0,7534	0,7545	0,7555	0,7563	0,7572	0,7579	0,7587	0,7595	0,7599	0,7602
1,10	0,7651	0,7682	0,7707	0,7727	0,7744	0,7759	0,7772	0,7784	0,7795	0,7806	0,7811	0,7817
1,20	0,7789	0,7831	0,7865	0,7894	0,7919	0,7940	0,7959	0,7976	0,7991	0,8006	0,8013	0,8019
1,30	0,7913	0,7965	0,8010	0,8048	0,8080	0,8108	0,8133	0,8155	0,8175	0,8193	0,8202	0,8210
1,40	0,8026	0,8088	0,8142	0,8188	0,8228	0,8263	0,8294	0,8322	0,8346	0,8369	0,8379	0,8389
1,50	0,8128	0,8194	0,8261	0,8316	0,8364	0,8406	0,8443	0,8475	0,8505	0,8531	0,8544	0,8556
1,60	0,8222	0,8300	0,8370	0,8433	0,8487	0,8536	0,8579	0,8617	0,8651	0,8682	0,8697	0,8711
1,70	0,8307	0,8393	0,8470	0,8539	0,8600	0,8655	0,8703	0,8747	0,8786	0,8821	0,8838	0,8853
1,80	0,8386	0,8477	0,8560	0,8635	0,8702	0,8763	0,8817	0,8865	0,8909	0,8949	0,8967	0,8985

1,90	0,8458	0,8554	0,8643	0,8723	0,8795	0,8861	0,8920	0,8973	0,9021	0,9065	0,9085	0,9104
2,00	0,8524	0,8625	0,8719	0,8802	0,8879	0,8950	0,9013	0,9071	0,9123	0,9170	0,9192	0,9214
2,20	0,8642	0,8750	0,8850	0,8941	0,9025	0,9103	0,9174	0,9238	0,9298	0,9352	0,9377	0,9401
2,40	0,8743	0,8856	0,8961	0,9057	0,9146	0,9228	0,9304	0,9374	0,9438	0,9497	0,9525	0,9552
2,60	0,8831	0,8948	0,9055	0,9155	0,9246	0,9331	0,9409	0,9482	0,9550	0,9612	0,9642	0,9670
2,80	0,8908	0,9027	0,9136	0,9236	0,9329	0,9415	0,9495	0,9569	0,9638	0,9702	0,9732	0,9761
3,00	0,8976	0,9096	0,9205	0,9306	0,9399	0,9484	0,9564	0,9638	0,9707	0,9771	0,9801	0,9831
3,20	0,9038	0,9156	0,9265	0,9365	0,9457	0,9542	0,9620	0,9692	0,9760	0,9823	0,9853	0,9882
3,40	0,9089	0,9209	0,9318	0,9417	0,9507	0,9590	0,9666	0,9736	0,9802	0,9862	0,9891	0,9919
3,60	0,9138	0,9257	0,9365	0,9462	0,9550	0,9631	0,9704	0,9771	0,9834	0,9892	0,9919	0,9945
3,80	0,9181	0,9299	0,9406	0,9501	0,9587	0,9665	0,9736	0,9800	0,9859	0,9914	0,9939	0,9964
4,00	0,9220	0,9338	0,9442	0,9536	0,9619	0,9694	0,9762	0,9823	0,9879	0,9930	0,9954	0,9977
4,40	0,9289	0,9403	0,9504	0,9593	0,9672	0,9742	0,9804	0,9859	0,9908	0,9951	0,9972	0,9991
4,80	0,9346	0,9458	0,9555	0,9640	0,9714	0,9778	0,9834	0,9883	0,9927	0,9964	0,9981	0,9997
5,20	0,9395	0,9504	0,9597	0,9678	0,9747	0,9807	0,9858	0,9902	0,9939	0,9972	0,9986	0,9999
5,60	0,9438	0,9543	0,9633	0,9709	0,9774	0,9830	0,9876	0,9916	0,9949	0,9977	0,9989	1,0000
6,00	0,9474	0,9576	0,9663	0,9736	0,9797	0,9848	0,9891	0,9927	0,9956	0,9980	0,9991	1,0000
7,00	0,9548	0,9643	0,9721	0,9786	0,9839	0,9882	0,9918	0,9946	0,9969	0,9986	0,9994	1,0000
8,00	0,9604	0,9692	0,9764	0,9821	0,9868	0,9905	0,9935	0,9958	0,9976	0,9990	0,9995	1,0000
10,00	0,9683	0,9760	0,9820	0,9868	0,9905	0,9934	0,9956	0,9972	0,9985	0,9994	0,9997	1,0000
15,00	0,9788	0,9847	0,9891	0,9923	0,9947	0,9965	0,9977	0,9986	0,9993	0,9997	0,9999	1,0000
20,00	0,9841	0,9888	0,9923	0,9947	0,9965	0,9977	0,9986	0,9992	0,9996	0,9998	0,9999	1,0000

Из работы Фамэ и Ролла (Fama and Roll, 1971).

Таблица А3.2 Квантили стандартизированных симметричных устойчивых распределений, u

F	Альфа (α)											
	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	1,95	2,00
0,5200	0,063	0,065	0,067	0,068	0,069	0,070	0,070	0,070	0,071	0,071	0,071	0,071
0,5400	0,126	0,131	0,134	0,136	0,138	0,139	0,140	0,141	0,141	0,142	0,142	0,142
0,5600	0,191	0,197	0,202	0,205	0,208	0,210	0,211	0,212	0,213	0,213	0,214	0,214
0,5800	0,257	0,265	0,271	0,275	0,279	0,281	0,283	0,284	0,285	0,286	0,286	0,286
0,6000	0,325	0,334	0,341	0,347	0,350	0,353	0,355	0,357	0,357	0,358	0,358	0,358
0,6200	0,396	0,406	0,414	0,420	0,424	0,427	0,429	0,430	0,432	0,432	0,432	0,432
0,6400	0,471	0,481	0,489	0,495	0,499	0,502	0,504	0,506	0,506	0,507	0,507	0,507
0,6600	0,550	0,560	0,567	0,573	0,577	0,580	0,581	0,583	0,583	0,583	0,583	0,583
0,6800	0,635	0,643	0,649	0,654	0,658	0,660	0,661	0,662	0,662	0,662	0,661	0,661
0,7000	0,727	0,732	0,736	0,739	0,742	0,743	0,744	0,744	0,743	0,743	0,742	0,742
0,7200	0,827	0,828	0,829	0,830	0,830	0,830	0,830	0,829	0,828	0,826	0,825	0,824
0,7400	0,939	0,932	0,928	0,926	0,924	0,921	0,919	0,917	0,915	0,912	0,911	0,910
0,7600	1,065	1,048	1,037	1,030	1,024	1,018	1,014	1,010	1,006	1,003	1,001	0,999
0,7800	1,209	1,179	1,158	1,143	1,131	1,122	1,115	1,108	1,102	1,097	1,095	1,092
0,8000	1,376	1,327	1,293	1,268	1,249	1,235	1,223	1,213	1,204	1,197	1,194	1,190
0,8200	1,576	1,505	1,447	1,409	1,380	1,358	1,341	1,326	1,314	1,304	1,299	1,295
0,8400	1,819	1,709	1,628	1,571	1,528	1,496	1,471	1,450	1,433	1,419	1,413	1,407
0,8600	2,125	1,964	1,847	1,762	1,700	1,653	1,616	1,587	1,564	1,544	1,536	1,528
0,8800	2,526	2,290	2,122	1,996	1,905	1,837	1,785	1,744	1,711	1,684	1,672	1,662
0,9000	3,078	2,729	2,480	2,297	2,161	2,061	1,985	1,927	1,880	1,843	1,827	1,813
0,9200	3,695	3,366	2,984	2,708	2,503	2,351	2,237	2,150	2,084	2,030	2,007	1,988
0,9400	5,242	4,379	3,774	3,331	3,002	2,763	2,581	2,444	2,341	2,261	2,228	2,199

0,9500	6,314	5,165	4,370	3,798	3,869	3,053	2,816	2,638	2,505	2,404	2,363	2,327
0,9600	7,916	6,319	5,230	4,453	3,882	3,448	3,127	2,887	2,708	2,576	2,522	2,477
0,9700	10,579	8,189	6,596	5,476	4,659	4,049	3,577	3,234	2,980	2,795	2,722	2,661
0,9750	12,706	9,651	7,645	6,251	5,240	4,485	3,901	3,478	3,160	2,933	2,846	2,772
0,9800	15,895	11,802	9,164	7,359	6,063	5,099	4,357	3,799	3,394	3,104	2,996	2,905
0,9850	21,205	15,300	11,589	9,100	7,341	6,043	5,056	4,283	3,728	3,330	3,191	3,070
0,9900	31,820	22,071	16,160	12,313	9,659	7,737	6,285	5,166	4,291	3,670	3,461	3,290
0,9950	63,657	41,348	28,630	20,775	15,595	11,983	9,332	7,290	5,633	4,375	3,947	3,643
0,9995	636,609	334,595	193,989	120,952	79,556	54,337	37,967	26,666	18,290	11,333	7,790	4,653

Из работы Фамэ и Ролла (Fama and Roll, 1971).

Таблица А3.3 Квантили стандартизированных симметричных устойчивых распределений, $0,70 \leq F \leq 0,75$, $u(\alpha, F)$

F	Альфа (α)										
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0,7000	0,727	0,732	0,736	0,739	0,742	0,743	0,744	0,744	0,743	0,743	0,742
0,7100	0,776	0,779	0,782	0,784	0,785	0,786	0,786	0,786	0,785	0,784	0,783
0,7200	0,827	0,828	0,829	0,830	0,830	0,830	0,830	0,829	0,828	0,826	0,824
0,7300	0,882	0,879	0,878	0,877	0,876	0,875	0,874	0,872	0,871	0,869	0,867
0,7400	0,939	0,932	0,928	0,926	0,924	0,921	0,919	0,917	0,915	0,912	0,910
0,7500	1,000	0,989	0,982	0,977	0,973	0,969	0,966	0,963	0,960	0,957	0,954

Из работы Фамэ и Ролла (Fama and Roll, 1971).

Глоссарий

Авторегрессионный (AR) процесс. Стационарный стохастический процесс, где текущая величина временного ряда соотносится с прошлыми величинами p (p — некоторое целое число), называется $AR(p)$ процессом. Когда текущая величина связана с двумя предыдущими величинами, мы имеем $AR(2)$ процесс. $AR(1)$ процесс имеет бесконечную память.

Авторегрессионный дробно интегрированный процесс скользящего среднего (ARFIMA). Процесс $ARIMA(p,d,q)$, где d принимает дробное значение. Когда d имеет дробное значение, процесс $ARIMA$ становится дробным броуновским движением и может проявлять эффекты долговременной памяти наряду с AR и MA эффектами краткосрочной памяти. См. «авторегрессионный (AR) процесс», «авторегрессионный процесс скользящего среднего (ARIMA)», «дробное броуновское движение», «процесс скользящего среднего (MA)».

Авторегрессионный интегрированный процесс скользящего среднего (ARIMA). Нестационарный стохастический процесс, связанный с процессом $ARMA$. Процессы $ARIMA(p,d,q)$ становятся стационарными процессами $ARMA(p,q)$, после их дифференцирования d раз, при этом d является целым числом. Процесс $ARIMA(p,1,q)$ становится процессом $ARMA(p,q)$ после взятия первых разностей. См. «авторегрессионный дробно интегрированный процесс скользящего среднего (ARFIMA)» и «авторегрессионный процесс скользящего среднего (ARMA)».

Авторегрессионный процесс скользящего среднего (ARMA). Стационарный стохастический процесс, который может быть смешанной моделью процессов AR и MA . Процесс $ARMA(p,q)$ объединяет процесс $AR(q)$ и процесс $MA(q)$.

Авторегрессионный условный гетероскедастический (ARCH) процесс. Нелинейный стохастический процесс, где дисперсия изменяется во времени и зависима от прошлой дисперсии. $ARCH$ -процессы имеют частотные распределения, которые отличаются остротой вершин в среднем значении и толстыми хвостами, что очень похоже на фрактальные распределения. Обобщенная модель $ARCH$ ($GARCH$) также широко используется. См. «фрактальное распределение».

Альфа. Мера островершинности функции плотности вероятности. В

нормальном распределении альфа равна 2. В случае фрактальных распределений или распределений Парето альфа находится между 1 и 2. Это величина, обратная показателю Херста H .

Антиперсистентность. В методе нормированного размаха (R/S-анализе) антиперсистентный временной ряд реверсирует чаще, чем ряд случайный. Если значения ряда возрастают в предыдущий период времени, наиболее вероятно, что ни будут снижаться в следующий период, и наоборот. Также имеет название «розовый шум» или « $1/f$ -шум». См. «показатель Херста», «эффект Иосифа», «эффект Ноя», «персистентность» и «метод нормированного размаха (R/S-анализ)».

Аттрактор. В нелинейных динамических рядах аттрактор определяет уровень равновесия системы. См. «предельный цикл», «точечный аттрактор» и «странный аттрактор».

Белый шум. Аудиоэквивалент броуновского движения — беспорядочные звуки, звучащие как шипение. Видеоэквивалент белого шума — «снегопад» на телеэкране. См. «броуновское движение».

Бифуркационная диаграмма. График, показывающий критические точки, где происходят бифуркации, и возможные решения, которые существуют в каждой точке.

Бифуркация. Явление, состоящее в том, что нелинейная динамическая система приобретает вдвое больше возможных решений, по сравнению с тем, что было до достижения критического уровня. Каскад бифуркаций часто называют дорогой к хаосу через удвоение периода, потому что переход от упорядоченной системы к системе хаотической часто происходит, когда число возможных решений начинает возрастать, каждый раз удваиваясь.

Волатильность. Стандартное отклонение изменений стоимости ценной бумаги.

Временная структура. Величина переменной в различных временных интервалах. Временная структура ставки процента — это прибыль, полученная до момента погашения обязательств, для различных ценных бумаг с фиксированной доходностью при различных сроках выплаты. Временная структура волатильности — стандартные отклонения прибылей при различных временных горизонтах.

Гауссиана. Система, вероятности которой хорошо описываются нормальным распределением или «колоколообразной кривой».

Гипотеза когерентного рынка (СМН). Гипотеза, состоящая в том, что функция плотности вероятности рынка может определяться групповыми настроениями и фундаментальным смещением. В зависимости от комбинации этих двух факторов рынок может находиться в одном из четырех возможных состояний:

Глоссарий

случайного блуждания, неустойчивого перехода, хаоса или когерентности.

Гипотеза фрактального рынка (ФМН). Гипотеза фрактального рынка утверждает, что (1) рынок состоит из множества инвесторов с различными инвестиционными горизонтами и (2) информационные множества, представляющие важность для каждого инвестиционного горизонта, различны. Если скоро рынок сохраняет такую фрактальную структуру, где отсутствует характеристическая временная шкала, он остается устойчивым. Когда горизонты рыночных инвесторов становятся одинаковыми, рынок теряет устойчивость, потому что каждый торгует, исходя из одного и того же информационного множества.

Гипотеза эффективного рынка (ЕМН). Теория, которая в своей полусильной форме утверждает, что поскольку текущие цены отражают всю публичную информацию, ни один участник рынка не может иметь преимущество перед другим, тем самым извлекая сверхприбыль.

Детерминизм. Теория, согласно которой определенные результаты полностью предопределены. Система детерминированного хаоса является системой, которая демонстрирует кажущиеся случайными результаты, даже тогда, когда эти результаты порождаются системой уравнений.

Динамическая система. Система уравнений, где выход одного уравнения является частью входа другого. Простым примером динамической системы может служить последовательность линейных систем уравнений. Нелинейные системы уравнений являются нелинейными динамическими системами.

Динамический шум. Явление, состоящее в том, что выход динамической системы искажается шумом, и зашумленная величина берется как вход на следующей итерации. Называется также системным шумом. См. «наблюдаемый шум».

Дробное броуновское движение. Смещенное случайное блуждание. Подобно бросанию несимметричной кости. В противоположность стандартному броуновскому движению, шансы смещаются в одну или другую сторону.

Дробный шум. Шум, который не полностью независим от предшествующих величин. См. «дробное броуновское движение», « $1/f$ -шум», «белый шум».

Евклидова геометрия. Геометрия на плоскости, которую мы изучаем в школе, основанная на немногих идеальных гладких, симметричных формах.

Измерительный шум. См. «наблюдаемый шум».

Корреляционная размерность. Оценка фрактальной размерности посредством измерения вероятности того, что две случайно выбранные точки будут находиться в пределах определенного расстояния друг от друга, и прослеживания

изменения этой вероятности при изменении расстояния. Белый шум будет заполнять все пространство, так как его составляющие некоррелированы, и его корреляционная размерность равна той размерности, в которой он размещен. Внутризависимая система будет держаться совокупно своими корреляциями и сохранять свою размерность, в какой бы размерности вложения она ни размещалась, до тех пор пока размерность вложения превышает фрактальную размерность системы.

Корреляционный интеграл. Вероятность того, что две точки находятся в пределах определенного расстояния одна от другой. Используется в расчете корреляционной размерности.

Корреляция. Степень влияния факторов друг на друга.

Критические уровни. Величины управляющих параметров, при которых изменяется природа нелинейной динамической системы. Такая система может бифурцировать или совершить переход от устойчивого состояния к турбулентности. Примером может служить соломинка, переломившая верблюжью спину.

Лептоэксцесс. Явление, состоящее в том, что кривая плотности вероятности имеет более толстые хвосты и более острый пик на среднем значении, чем это имеет место у нормального распределения.

Марковская зависимость. Условие, при котором наблюдения во временном ряде зависят от предшествующих наблюдений в близлежащем периоде. Марковская зависимость быстро исчезает, в то время как долговременные эффекты, наподобие зависимости Херста, распадаются в течение длительного времени.

Масштабирование. Изменения характеристик объекта, связанные с изменениями размеров используемого измерительного устройства. Для трехмерного пространства увеличение радиуса накрывающей сферы повлияет на объем покрытого объекта. Для временного ряда это может быть изменение его амплитуды при возрастании интервала времени.

Метод нормированного размаха (R/S-анализ). Метод анализа, разработанный Херстом для определения эффектов долговременной памяти и дробного броуновского движения. Измеряет увеличение покрываемого точками расстояния при возрастании временного масштаба. Для броуновского движения это расстояние увеличивается пропорционально корню квадратному из времени. Ряд, который увеличивается с другой скоростью, не является случайным. См. «антиперсистентность», «дробное броуновское движение», «показатель Херста», «эффект Иосифа», «эффект Ноя» и «персистентность».

Модель оценки капитальных активов (САРМ). Модель, основанная на равновесной оценке актива, развитая независимо друг от друга Шарпом, Линтнером и Моссином. Простейшая версия утверждает, что активы оцениваются в соответствии с

Глоссарий

их связью с рыночным портфелем, содержащим все рискованные активы, определяемых посредством коэффициента бета ценных бумаг.

Наблюдаемый шум. Расхождение между истинной величиной в системе и величиной наблюдаемой, произошедшее из-за неточности измерений. Называется также измерительным шумом. См. «динамический шум».

Нормальное распределение. Хорошо известная кривая имеющая форму колокола. В соответствии с центральной предельной теоремой функция плотности вероятности большого количества независимых, идентично распределенных чисел будет приближаться к нормальному распределению. В семействе фрактальных распределений нормальное распределение существует только тогда, когда альфа равна 2, или показатель Херста равен 0,50. Таким образом, нормальное распределение является частным случаем и, к тому же, в анализе временных рядов весьма редким. См. «альфа», «центральная предельная теорема», «фрактальное распределение».

Одноиндексная модель. Измерение риска портфеля посредством измерения чувствительности портфеля ценных бумаг к изменениям рыночного индекса. Эта мера чувствительности называется «бета» ценной бумаги или портфеля. Похожа, но не идентична модели оценки капитальных активов (CAPM).

Персистентность. В R/S-анализе – склонность ряда следовать трендам. Если система увеличивалась в предыдущий период, имеется вероятность того, что она будет продолжать увеличиваться и в следующий период. Персистентный временной ряд имеет долгую память, поэтому в нем имеют место долговременные корреляции между текущими событиями и событиями будущими. Называется также черным шумом. См. «антиперсистентность», «показатель Херста», «эффект Иосифа», «эффект Ноя» и «метод нормированного размаха (R/S-анализ)».

Подразумеваемая волатильность. При использовании модели опционного ценообразования Блэка-Шоулса уровень стандартного отклонения ценовых изменений, который приравнивает текущую цену опциона к другим независимым переменным в формуле. Часто используется как мера текущих уровней рыночной неопределенности.

Показатели Ляпунова. Мера динамики аттрактора. Каждая размерность имеет показатель Ляпунова. Положительный показатель измеряет чувствительность зависимости от начальных условий, или то, насколько наши предсказания могут отклоняться исходя из различных оценок начальных условий. Другой подход к оценке показателей Ляпунова состоит в том, что они характеризуют потерю предсказательной способности при попытке заглянуть в будущее. Странные аттракторы характеризуются, по меньшей мере, одним положительным показателем. Отрицательный показатель измеряет схождение точек. Точечные аттракторы характеризуются всеми отрицательными переменными. См. «аттрактор», «предельный цикл», «точечный аттрактор» и «странный аттрактор».

Показатель Херста (H). Мера смещения в частично броуновском движении: $H=0,50$ для броуновского движения; $0,50 < H \leq 1,00$ для персистентного или трендоустойчивого ряда; $0 \leq H \leq 0,50$ для антиперсистентной или возвратной к среднему системы. Величина, обратная показателю Херста, равна альфе — характеристическому показателю во фрактальных распределениях или распределениях Парето.

Предельные циклы. Аттрактор (для нелинейной динамической системы), который имеет периодические циклы или орбиты, в фазовом пространстве. Примером является недемпфированный маятник, который имеет замкнутые круговые орбиты, равные амплитуде раскачиваний маятника. См. «аттрактор», «фазовое пространство».

Процесс скользящего среднего (MA). Стационарный стохастический процесс, где наблюдаемый временной ряд есть результат скользящего среднего ненаблюдаемого случайного временного ряда. $MA(q)$ -процесс представляет собой q -периодное скользящее среднее.

Равновесие. Устойчивое состояние системы. См. «аттрактор».

Распределения Парето (Парето-Леви). См. «фрактальное распределение».

Риск. В современной теории портфеля (MPT) риск измеряется как стандартное отклонение доходностей ценных бумаг.

Розовый шум. См. «антиперсистентность».

Самоподобие. Явление, состоящее в том, что малые части объекта качественно одинаковы с целостным объектом или подобны ему. В определенных детерминистических фракталах, вроде треугольника Серпинского, малые его части при сравнении с целой фигурой выглядят одинаковыми. В случайных фракталах малые интервалы времени будут статистически подобны большим интервалам. См. «фрактал».

Системный шум. См. «динамический шум».

Система с обратной связью. Уравнение, где выход становится входом при следующей итерации, функционирующее подобно громкоговорящей системе, когда микрофон расположен близко к говорящему, и обратная связь возникает как закольцованный сигнал.

Случайное блуждание. Броуновское движение, где предшествующие изменения величины переменной не связаны с прошлыми или будущими изменениями.

Современная теория портфеля (MPT). Обобщающее название для методов

Глоссарий

количественного анализа портфеля рисковых активов, основанных на ожидаемой прибыли (или среднем ожидаемом значении) и риске (или стандартном отклонении) портфеля ценных бумаг. В соответствии с МРТ инвесторы должны были бы предпочитать портфель с наивысшей ожидаемой прибылью при заданном уровне риска.

BDS-Статистика. Статистика, основанная на корреляционном интеграле, исследующая вероятность того, что чисто случайная система может иметь те же свойства масштабирования, что и изучаемая система. Названа в честь основателей: Брока, Дечерта и Шейнкмана (Brock, Dechert, and Scheinkman, 1987) См. «корреляционный интеграл».

V-Статистика. Отношение $(R/S)_n$ к индексу квадратного корня из времени n .

Странный аттрактор. Аттрактор в фазовом пространстве, где точки никогда не повторяются, и орбиты никогда не пересекаются, но и те, и другие остаются в пределах одной области фазового пространства. В противоположность предельным циклам или точечным аттракторам странные аттракторы непериодичны и обычно имеют фрактальную размерность. См. «аттрактор», «хаос», «предельный цикл», «точечный аттрактор».

Техническая информация. Информация, относящаяся к моментальным состояниям отдельной переменной. В рыночном анализе техническая информация — это только информация о динамике рынка и поведении инвесторов.

Точечный аттрактор. В нелинейной динамике — аттрактор, сжимающий все орбиты в фазовом пространстве к одной точке, или вектору значений. В сущности, система, стремящаяся занять устойчивое положение при одной равновесной величине, будет иметь точечный аттрактор. Маятник, демпфированный трением, всегда остановится, так что его фазовое пространство всегда будет стягиваться в точку, где координата и скорость равны нулю. См. «аттрактор», «фазовое пространство».

Устойчивый пареттиан или фрактальная гипотеза. Теория, утверждающая, что в характеристической функции семейства фрактальных распределений величина характеристического показателя альфа может варьироваться между 1 и 2. См. «альфа», «фрактальное распределение», «гауссиана».

Фазовое пространство. График, показывающий все возможные состояния системы. В фазовом пространстве мы наносим значение переменной против возможных величин других переменных в один и тот же момент времени. Если система описывается тремя переменными, строится трехмерное фазовое пространство, в котором каждой переменной соответствует одна размерность.

Фрактал. Объект, в котором части некоторым образом подобны целому, т. е. отдельные составные части «самоподобны». Примером является древовидное

разветвление. В то время как каждая ветвь и каждое последовательно уменьшающееся разветвление различны, они качественно подобны структуре всего дерева.

Фрактальная размерность. Число, которое количественно описывает то, как объект заполняет пространство. В евклидовой (плоской) геометрии объекты сплошны и непрерывны – они не имеют отверстий или промежутков. Как таковые они имеют целочисленные размерности. Фракталы грубы и часто прерывисты, подобно скомканному куску бумаги, и поэтому имеют дробную, или фрактальную размерность.

Фрактальное распределение. Функция плотности вероятности, которая статистически самоподобна; это означает, что в различных интервалах времени статистические характеристики остаются одинаковыми.

Фундаментальная информация. Информация об экономическом состоянии компании или экономики в целом. В рыночном анализе фундаментальная информация соотносится только с перспективой доходности фирмы.

Хаос. Детерминистическая нелинейная динамическая система, которая может продуцировать кажущиеся случайными результаты. Хаотическая система должна иметь фрактальную размерность и проявлять чувствительную зависимость от начальных условий. См. «фрактальная размерность», «показатель Ляпунова», «странный аттрактор».

Центральная предельная теорема. Закон больших чисел; утверждает, что если объем выборки независимых, одинаково распределенных случайных чисел стремится к бесконечности, ее функция плотности вероятности приближается к нормальному распределению. См. «нормальное распределение».

Цикл. Полный орбитальный период.

Черный шум. См. «персистентность».

1/f-Шум. См. «антиперсистентность».

Шумовой хаос. Хаотическая динамическая система с добавлением наблюдаемого или системного шума. См. «хаос», «динамическая система» и «наблюдаемый шум».

Эконометрия. Наука о количественных экономических предсказаниях.

Энтропия. Уровень дезорганизации системы.

Эффект Иосифа. Тенденция персистентного временного ряда ($0,50 < H \leq 1,00$) иметь тренды и циклы. Термин был введен Мандельбротом, его источник —

Глоссарий

библейский рассказ о том, как Иосиф истолковал сон фараона о семи плодородных и семи неурожайных годах.

Эффект Ноя. Тенденция персистентного временного ряда ($0,50 < H \leq 1,00$) к резким прерывистым изменениям. Нормальное распределение предполагает непрерывные изменения в системе. Однако временной ряд, который демонстрирует статистику Херста, может внезапно изменять уровни сбросом величины вверх или вниз. Мандельброт ввел этот термин, памятуя о библейском рассказе о потопе. См. «антиперсистентность», «показатель Херста», «эффект Иосифа» и «персистентность».

Эффективная граница. В анализе средних и дисперсий — кривая, где лежит множество эффективных портфелей, т. е. таких портфелей или рискованных активов, которые имеют наивысший уровень ожидаемой прибыли при их уровне риска.