УДК 336.76
ББК 65.9(2)26
Ш 34

Рекомендовано редакционно-издательским советом Государственного университета — Высшей школы экономики

Рецензент — кандидат физико-математических наук *А.Г.Шоломицкий*

Ш 34 **Шведов А.С.** Процентные финансовые инструменты: оценка и хеджирование. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 152 с.
ISBN 5-7598-0085-X

Описываются методы оценки и стратегии хеджирования для таких финансовых инструментов, как процентные свопы, опционы на облигации, кэпы и др. Эти финансовые инструменты используются для защиты от процентных рисков и для извлечения прибыли путем игры на изменении процентных ставок.

Для студентов и аспирантов финансовых и экономических специальностей и для работников рынка ценных бумаг.

УДК 336.76
ББК 65.9(2)26

ISBN 5-7598-0085-X

Оглавление

Введение

В книге описываются математические методы, применяемые для решения задач, возникающих при работе с облигациями и с процентными финансовыми инструментами. Первая задача — это защита от процентных рисков, то есть защита от тех потерь, к которым может привести участника рынка неблагоприятное для него изменение процентных ставок. Вторая задача — это извлечение прибыли путем игры на изменении процентных ставок. Эти две задачи дополняют одна другую, как и всегда дополняют одна другую задачи обороны и нападения. Математические методы, используемые для решения данных задач, достаточно сложные. Для полного понимания этих методов необходимо знать теорию случайных процессов, теорию уравнений с частными производными, вычислительную математику. Но альтернативы такому пути нет. Конечно, полное понимание математических методов не требуется от всех работников рынка. Многие могут довольствоваться готовыми компьютерными программами или готовыми результатами расчетов. Но разработчики алгоритмов теорию знать должны.

Ряд основополагающих результатов математической теории портфелей ценных бумаг был получен в 1950-е годы в США. Эти результаты сразу же были востребованы для работы на рынке акций. Время появления этих результатов совпадает со временем распространения первых компьютеров, и это не случайное совпадение. Расчеты составов портфелей с оптимизацией тех или иных показателей в большинстве случаев без компьютеров невозможны. Данная математическая теория подтверждает, что включение в портфели кроме самих акций еще и опционов на эти акции, а также других деривативов, приносит большую пользу. Одно из преимуществ состоит в том, что включение в портфель опционов позволяет одновременно увеличивать ожидаемую доходность портфеля, уменьшать риск и, следовательно, увеличивать темп роста капитала. Но для выработки торговых стратегий, связанных с использованием опционов, в частности для оценки опционов, потребовались математические методы значительно более сложные, чем когда-либо применявшиеся в экономике до этого. Необходимо оказалось использовать случайные процессы не только с дискретным, но и с непрерывным временем, а также разнообразные дифференциальные уравнения.

Аналогичные задачи возникают не только на рынке акций, но и на рынке облигаций. Однако при оценке деривативов, связанных с облигациями, (такие деривативы обычно называют процентными) возникает серьезная дополнительная трудность. Если при оценке деривативов, связанных с акциями, процентную ставку можно округленно считать не зависящей ни от срока, ни от времени заимствования, то при оценке процентных деривативов этого делать нельзя. Нельзя считать процентные ставки не связанными с ценами облигаций, в частности, нельзя считать процентные ставки постоянными. Поэтому анализ здесь необходим еще более тонкий. За последние одно — два десятилетия в изучении процентных деривативов был достигнут очень большой успех, и эта теория стала одним из ведущих направлений финансовой математики.

Настоящая книга содержит описание некоторых методов расчетов, широко используемых при работе с процентными деривативами.

За рубежом издано большое количество книг, целиком или частично посвященных вычислительным методам для процентных деривативов, например [34, 44, 47, 57, 58, 59]. Ряд книг, содержащих значительный материал, относящийся к процентным деривативам, издан и на русском языке, например [70, 71, 74]. Однако в существующих на русском языке книгах, по мнению автора, недостаточно освещены вычислительные вопросы.

На современных финансовых рынках существует очень большое число разнообразных финансовых инструментов, так или иначе связанных с ценами облигаций, и для их оценки разработано множество различных формул и численных методов. При отборе материала для книги должен быть выбран какой-то принцип. Если проводить аналогию с вычислительной гидродинамикой, то можно сказать, что настоящая книга посвящена одномерным невязким задачам. Это не значит, что многомерные или вязкие задачи неважны. Наоборот, очень важны. Многомерность в финансовых задачах — это использование для оценки моделей, в которых неопределенность передается больше чем одним фактором, рассмотрение финансовых инструментов, связанных больше чем с одной валютой и т.п. Вязкость — это учет трансакционных издержек, налогов, кредитных рисков и др. Но к изучению соответствующих методов расчетов нельзя переходить, не разобравшись с методами расчетов для одномерных невязких задач.

В списке литературы, кроме тех работ, в которых были предложены излагаемые в книге методы расчетов, приведены некоторые работы, содержащие развитие данных методов, а также другие работы на близкие темы.

Требования к читателям настоящей книги достаточно высокие. Общематематическая подготовка предполагается скорее в рамках физико-математического университетского курса, чем в рамках программы технического вуза. Кроме того, предполагается, что читатель знаком с общей теорией финансовых деривативов, например в объеме учебников [48] или [67].

Настоящая книга формально не является продолжением предыдущих обзорных работ автора [72, 73]. Но знакомство с этими работами облегчит чтение данной книги.

Основные линии изложения в книге следующие.

Рассмотрение традиционных процентных свопов (раздел 1). Для данных финансовых инструментов задачи оценки и хеджирования могут быть решены полностью и с использованием только аппарата элементарной математики.

Оценка и хеджирование европейских опционов на облигации (разделы 2, 3 и, частично, раздел 6). Работа здесь основана на явных формулах для цен европейских опционов, сходных с формулой Блэка — Шоулса для цен европейских опционов на акции.

Изящный и неожиданный метод Блэка — Дермана — Тоя, пригодный для оценки и хеджирования многих финансовых инструментов, в том числе американских процентных опционов (разделы 4, 5).

Метод Халла — Уайта, представитель наиболее традиционного направления работы с процентными деривативами (разделы 6, 7). Данный метод создан на основе метода Васичека и метода Хо — Ли; начало этому направлению было положено еще в 1970-е годы.

Метод Хита — Джерроу — Мортона, пригодный для работы с очень широким классом финансовых инструментов (раздел 8). Возможно, что это на сегодняшний день наиболее распространенный метод оценки для процентных деривативов.

Раздел 9 содержит результаты расчетов, проведенных с целью сравнения различных методов. Здесь же описан традиционный подход к хеджированию облигаций фьючерсными контрактами, основанный на расчете дюраций.

Сделки типа пари, связанные с будущими экономическими показателями, а так могут интерпретироваться, например, фьючерсные и опционные сделки, необходимы для динамичного развития рыночной экономики. Это подтверждает опыт всех развитых капиталистических стран. Капитал, используемый на финансовых рынках, служит тем резервом, из которого промышленные и другие предприятия через систему срочных контрактов черпают финансовые ресурсы при неблагоприятных изменениях экономических показателей. Финансовые рынки обеспечивают переток капитала из тех отраслей экономики, где он в данное время менее нужен, в те отрасли, где этот капитал в данное время нужнее. Без использования финансовых рынков не могут эффективно работать негосударственные пенсионные фонды. Но этот капитал должен находиться в постоянном движении, стремление участников получить прибыль это движение обеспечивает. Наиболее привлекательными для участников оказываются те рынки, на которых они могут использовать разнообразные, иногда очень сложные, финансовые инструменты.

Книга написана на основе курса лекций, которые автор читал студентам факультета магистратуры Государст-

венного университета — Высшей школы экономики. Автор благодарит Г.Г.Канторовича, бывшего в период становления курса деканом факультета магистратуры, за помощь в организации этого и других курсов, а также всех коллег, высказавших автору свои замечания в процессе работы над книгой.

1. Процентные свопы и другие финансовые инструменты. Задача оценки и хеджирования

Через $P(t,T)$ обозначим цену в момент времени t *бескупонной облигации*, по которой в момент времени T гарантированно выплачивается 1 руб., $t \leqslant T$. Очевидно, что $P(T,T) = 1$; при $t < T$ справедливы неравенства $0 < P(t,T) < 1$. При фиксированном t величина $P(t,T)$, как функция от T, является монотонно убывающей. Набор величин $P(t,T)$ при всевозможных $T \geqslant t$ называется *дисконтной функцией* в момент времени t.

Просто начисляемая ставка спот $r_s(t,T)$ определяется через формулу

$$1 + (T-t)\, r_s(t,T) = \frac{1}{P(t,T)}.$$

Иногда величину $r_s(t,T)$ называют также простой процентной ставкой.

При $t \leqslant T_1 < T_2$ *просто начисляемая форвардная ставка* $f_s(t,T_1,T_2)$ определяется через формулу

$$1 + (T_2 - T_1)\, f_s(t,T_1,T_2) = \frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}.$$

О других способах определения процентных ставок будет сказано в заключительной части данного раздела. Там же будут приведены некоторые другие необходимые для последующего сведения. А пока введенных понятий достаточно, чтобы перейти к рассмотрению одного из базовых инструментов финансового рынка — процентных свопов.

Рассмотрим моменты времени $0 < t < T$. Пусть $\tau = T - t$. Два участника рынка A и $Б$ в момент времени 0 заключили между собой следующий договор.

1. В момент времени T участник A платит $X\tau$ руб. участнику $Б$, где X — оговоренная в договоре фиксированная ставка.

2. В тот же момент времени T участник $Б$ платит $R\tau$ руб. участнику A, где $R = r_s(t, T)$ просто начисляемая ставка спот, та ставка, которая будет существовать на рынке в момент времени t при заимствовании на срок $(T - t)$.

Такой договор называется *соглашением о форвардной ставке*. Момент времени t называется *датой измерения плавающей ставки*. Момент времени T называется *датой выплаты*.

Оценка соглашений о форвардных ставках, как и оценка других финансовых инструментов, производится из соображений отсутствия *арбитражных возможностей*. То есть ищется та цена финансового инструмента, при которой невозможно построить арбитражный портфель с использованием данного финансового инструмента и каких-то других финансовых инструментов.

Арбитражный портфель — это такой портфель, стоимость которого равна нулю в начальный момент времени, и существует такой более поздний момент времени, для которого стоимость данного портфеля положительна с вероятностью $p > 0$ и равна нулю с вероятностью $(1 - p)$. При этом состав портфеля может неоднократно пересматриватьсяся в зависимости от изменения состояния рынка. Но покупка новых финансовых инструментов должна производиться только за счет продажи финансовых инструментов, входящих в портфель, либо на средства, полученные как выплаты по каким-то финансовым инструментам, входящим в портфель. Такими выплатами могут быть, например, дивиденды или купоны, если в портфель входят акции или купонные облигации, и по ним заняты длинные позиции. В свою очередь, все средства, полученные от продаж или как выплаты по входящим в портфель финансовым инструментам, идут либо на покупку новых финансовых инструментов, либо на выполнение обязательств по имеющимся финансовым инструментам. Такими обязательствами могут быть, например, выплаты дивидендов или купонов, если в портфель входят акции или купонные облигации, и по ним заняты короткие позиции[1]. Приведенные условия означают, что торговая стратегия является *самофинансируемой*.

Практическое значение оценки, производимой из соображений отсутствия арбитражных возможностей, очень велико. Если рассчитанная таким образом цена финансового инструмента существенно отличается от его реальной цены, это может означать наличие арбитражной возможности на реальном рынке. Эту мысль можно выразить даже проще. "Покупай, когда дешево, продавай, когда дорого." Для определения того, дешев или дорог в данный момент времени данный финансовый инструмент, и используется в качестве критерия цена, рассчитанная из соображений отсутствия арбитражных возможностей.

[1] Вопрос о том, что такое длинные и короткие позиции, подробно рассмотрен, например, в книге [73].

Оказывается, можно однозначно определить размер платежа, который должен быть произведен в момент времени 0 между участниками рынка A и $Б$, чтобы ни один из них не мог использовать соглашение о форвардной ставке для составления арбитражного портфеля[2]. Этот размер платежа называется *текущей стоимостью* финансового инструмента или ценой финансового инструмента, в данном случае, соглашения о форвардной ставке[3].

Теорема. Чтобы ни один из участников рынка A и $Б$ не мог использовать соглашение о форвардной ставке для совершения арбитражной операции, при заключении этого соглашения в момент времени 0 участник A должен заплатить участнику $Б$

$$\tau P(0,T)\,(f_s(0,t,T) - X) \quad \text{руб.}$$

[2]Делая это утверждение, мы подразумеваем выполнение условий идеального рынка, т.е. бесконечную делимость и абсолютную ликвидность всех активов, отсутствие налогов и трансакционных издержек, доступность всей информации о рынке для всех участников, выполнение всеми участниками рынка всех своих обязательств, неограниченные возможности заимствования по существующим процентным ставкам, одинаковым для всех участников. Условия идеального рынка считаются выполненными при рассмотрении всех последующих задач. Некоторые их этих условий, впрочем, могут быть ослаблены, рассчитанные цены финансовых инструментов при этом изменятся, но в данной книге такие "вязкие" задачи не рассматриваются.

[3]Отметим, что на практике при заключении соглашения о форвардной ставке никаких платежей не производится, и приводимая ниже теорема используется для определения фиксированной ставки X именно такой, чтобы размер платежа был нулевым, т.е. фиксированная ставка X должна быть равна форвардной ставке. Поэтому данный финансовый инструмент и называется соглашением о форвардной ставке. Ненулевая цена у соглашения о форвардной ставке появляется в последующие моменты времени, когда это соглашение может быть куплено или продано на рынке.

Замечание. Если данная величина отрицательна, это означает, что участник A не производит, а принимает соответствующий платеж.

Доказательство. Через Z обозначим неизвестный платеж участника A участнику $Б$ в момент времени 0. Предположим сначала, что

$$Z < \tau\, P(0,T)\,(f_s(0,t,T) - X).$$

Покажем, что в этом случае участник A, заключивший соглашение о форвардной ставке, имеет возможность составить арбитражный портфель. Говоря ниже об облигациях, мы будем иметь в виду безрисковые бескупонные облигации, по которым в момент погашения выплачивается 1 руб.

Пусть в момент времени 0 участник A купил $(1+X\tau)$ облигаций с погашением в момент времени T и выпустил одну облигацию с погашением в момент времени t. В момент времени t стоимость облигации с погашением в момент времени T есть

$$\frac{1}{1+R\tau},$$

где $R = r_s(t,T)$.

Чтобы в момент времени t выполнить свои обязательства по проданной облигации, участник A должен получить сумму равную 1 руб. Для этого он в момент времени t выпускает (то есть продает) $(1+R\tau)$ облигаций с погашением в момент времени T.

В табл. 1.1 показано то количество рублей, которое либо получает, либо тратит участник A в каждый момент времени. Знак "+" отвечает получению, знак "−" — выплате денег участником A.

Таблица 1.1. *Платежи по соглашению о форвардной ставке и по хеджирующему портфелю облигаций в различные моменты времени*

	Момент времени 0	Момент времени t	Момент времени T
1. Выплата денег по соглашению о форвардной ставке			$-X\tau$
2. Получение денег по соглашению о форвардной ставке			$R\tau$
3. Платеж участнику $Б$ при заключении соглашения о форвардной ставке	$-Z$		
4. Покупка $(1+X\tau)$ облигаций с погашением в момент времени T	$-(1+X\tau)\cdot$ $\cdot P(0,T)$		$1+X\tau$
5. Продажа одной облигации с погашением в момент времени t	$P(0,t)$	-1	
6. Продажа $(1+R\tau)$ облигаций с погашением в момент времени T		1	$-(1+R\tau)$
Сумма		0	0

Стоимость данного портфеля равна 0 в моменты времени t и T. В момент времени 0 участником A получена сумма

$$-X\tau\, P(0,T) + P(0,t) - P(0,T) - Z =$$

$$= \tau\, P(0,T) \left(\frac{P(0,t)/P(0,T) - 1}{\tau} - X \right) - Z$$

$$= \tau\, P(0,T)\,(f_s(0,t,T) - X) - Z = 0$$

Таким образом, участник A получает положительную сумму в момент времени 0 и закрывает позиции в моменты времени t и T с нулевыми суммарными платежами. Это арбитражная возможность. Поэтому предположение

$$Z < \tau P(0,T)\,(f_s(0,t,T) - X)$$

должно быть отброшено. Аналогично отбрасывается предположение

$$Z > \tau P(0,T)\,(f_s(0,t,T) - X).$$

В этом случае арбитражный портфель может составить участник $Б$. Поэтому, предполагая, что у каждого финансового инструмента должна существовать текущая стоимость, мы получаем, что единственный допустимый размер платежа

$$Z = \tau P(0,T)\,(f_s(0,t,T) - X).$$

Теорема доказана.

Процентный своп — это набор соглашений о форвардных ставках. Рассмотрим моменты времени $t_1, \ldots, t_n$ и $T_1, \ldots, T_n$, где $0 < t_i < T_i$ при любом i. Пусть $\tau_i = T_i - t_i$. Два участника рынка A и $Б$ в момент времени 0 заключили между собой следующий договор.

1. В каждый момент времени $T_i, i = 1, \ldots, n$, участник A платит $N_i X_0 \tau_i$ руб. участнику $Б$. Здесь N_i — *условная основная сумма* для i-го платежа, X_0 — оговоренная в договоре фиксированная ставка.

2. В каждый момент времени $T_i, i = 1, \ldots, n$, участник $Б$ платит $N_i R_i \tau_i$ руб. участнику A, где $R_i = r_s(t_i, T_i)$.

Для любого момента времени t, такого, что $0 \leqslant t \leqslant \min(t_1, \ldots, t_n)$, текущая стоимость всех платежей участника A составляет

$$X_0 \sum_{i=1}^{n} N_i \, \tau_i \, P(t, T_i).$$

В силу доказанной теоремы текущая стоимость всех платежей участника *Б* составляет

$$\sum_{i=1}^{n} N_i \, f_s(t, t_i, T_i) \, \tau_i \, P(t, T_i).$$

Поэтому текущая стоимость свопа в момент времени t для участника A, осуществляющего фиксированные платежи, составляет

$$-\sum_{i=1}^{n} N_i \, X_0 \, \tau_i \, P(t, T_i) + \sum_{i=1}^{n} N_i \, f_s(t, t_i, T_i) \, \tau_i \, P(t, T_i).$$

Задача оценки процентного свопа решена.

Стратегия хеджирования процентного свопа портфелем из бескупонных облигаций ясна из доказательства приведенной теоремы. (Каждое из соглашений о форвардных ставках может быть хеджировано по отдельности.) В данном случае, при соблюдении условий идеального рынка удается построить такой самофинансируемый портфель из облигаций, стоимость которого во все моменты времени совпадает по величине со стоимостью процентного свопа.

Для полноты изложения приведем еще одно определение, хотя в дальнейшем оно и не будет нами использоваться. *Равновесная ставка свопа* X_t для момента времени t определяется, как такая ставка, при которой текущая стоимость в момент времени t всех платежей участника A совпадает с текущей стоимостью в момент времени t всех платежей участника *Б*:

$$X_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i f_s(t, t_i, T_i)\, \tau_i\, P(t, T_i)}{\sum_{i=1}^{n} N_i\, \tau_i\, P(t, T_i)}.$$

При этом текущая стоимость свопа в момент времени t для участника A может быть представлена в виде

$$(X_t - X_0) \sum_{i=1}^{n} N_i\, \tau_i\, P(t, T_i).$$

К сожалению или нет, но далеко не для всех существующих финансовых инструментов задача определения их текущей стоимости и стратегии хеджирования решается так просто, как для процентного свопа. Часто для решения этих задач приходится применять значительно более сложный математический аппарат, чем описанный выше. Это не означает, что сами размеры и сроки выплат для этих финансовых инструментов определяются по каким-то очень сложным формулам.

Мы рассмотрим несколько примеров таких финансовых инструментов, но сначала изобразим схематически платежи между участниками рынка A и $Б$ по соглашению о форвардной ставке (см. рис. 1.1). Через N обозначена условная основная сумма, через $(FRA)_0$ — размер платежа по соглашению о форвардной ставке в момент времени 0 участником, являющимся плательщиком фиксированной ставки в момент времени T.

Моменты времени

	0	T
А	$(FRA)_0 =$ $= N(T-t)\,P(0,T)\cdot$ $\cdot(f_s(0,t,T) - X)$	$N(T-t)\cdot$ $\cdot(X - r_s(t,T))$
Б	↓	↓

Рис. 1.1. *Платежи по соглашению о форвардной ставке в моменты времени 0 и T*

Моменты времени

	0	t
А	$(Arrears\,FRA)_0$	$N(T-t)\cdot$ $\cdot(X - r_s(t,T))$
Б	↓	↓

Рис. 1.2. *Платежи по отсроченному соглашению о форвардной ставке в моменты времени 0 и t*

Рассмотрим финансовый инструмент, называемый *отсроченным соглашением о форвардной ставке.* Условия этого соглашения полностью совпадают с условиями обычного соглашения о форвардной ставке с единственным исключением. Платеж, который по соглашению о форвардной ставке производится в момент времени T, по отсроченному соглашению о форвардной ставке производится в момент времени t. Схематически платежи показаны на рис. 1.2. Через $(Arrears\, FRA)_0$ обозначен размер платежа по отсроченному соглашению о форвардной ставке в момент времени 0.

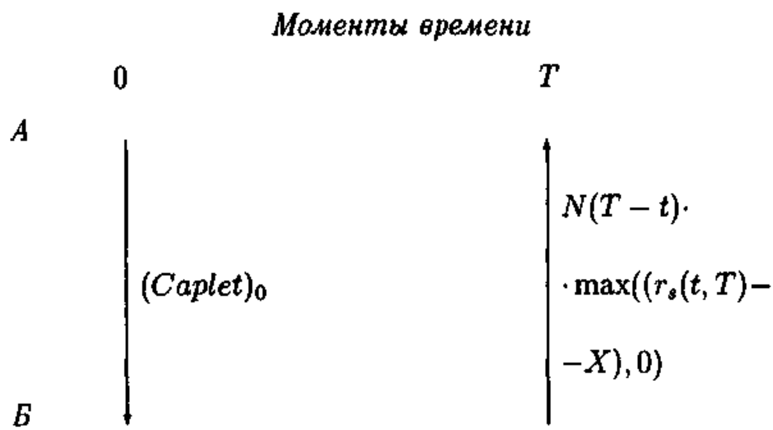

Рис. 1.3. *Платежи по кэплету в моменты времени 0 и T*

Финансовый инструмент, называемый *кэплет,* отличается от соглашения о форвардной ставке тем, что размер платежа в момент времени T составляет

$$N(T-t)\max((r_s(t,T)-X),0).$$

При принятых нами обозначениях удобнее считать, что этот платеж производит участник *Б*, являющийся плательщиком плавающей ставки. Схематически платежи показаны на рис. 1.3. Через $(Caplet)_0$ обозначен размер платежа по кэплету в момент времени 0.

В качестве еще одного примера рассмотрим *флорлет*, по которому платеж в момент времени T составляет

$$N(T-t)\max((X - r_s(t,T)), 0).$$

Схематически платежи по данному финансовому инструменту показаны на рис. 1.4. Через $(Floorlet)_0$ обозначен размер платежа по флорлету в момент времени 0.

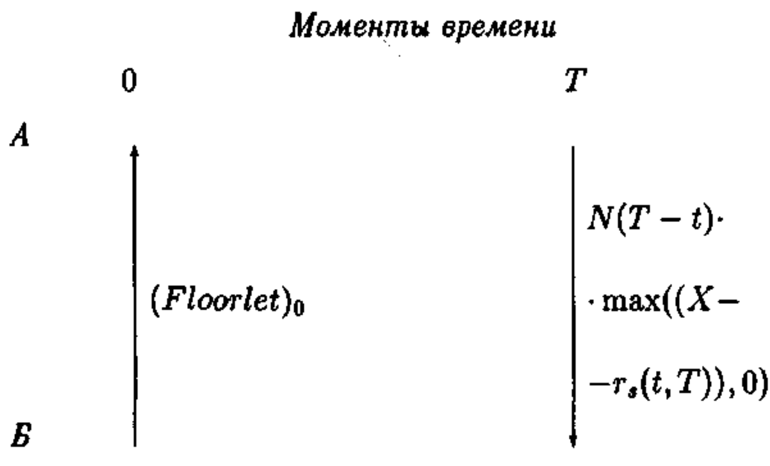

Рис. 1.4. *Платежи по флорлету в моменты времени 0 и T*

Нетрудно увидеть, что должно выполняться соотношение

$$(Caplet)_0 - (Floorlet)_0 = (FRA)_0. \tag{1.1}$$

Таблица 1.2. ***Платежи по соглашению о форвардной ставке и по хеджирующему портфелю, состоящему из выпущенного кэплета и купленного флорлета, в моменты времени 0 и T***

	Момент времени 0	Момент времени T	
		при $X \geqslant R$	при $X < R$
1. Выплата денег по соглашению о форвардной ставке		$-X\tau$	$-X\tau$
2. Получение денег по соглашению о форвардной ставке		$R\tau$	$R\tau$
3. Платеж при заключении соглашения о форвардной ставке	$-(FRA)_0$		
4. Продажа кэплета	$(Caplet)_0$	0	$-(R-X)\tau$
5. Покупка флорлета	$-(Floorlet)_0$	$(X-R)\tau$	0
Сумма		0	0

Нарушение соотношения (1.1) означает наличие арбитражной возможности. Действительно, рассмотрим портфель участника, являющегося плательщиком фиксированной ставки по соглашению о форвардной ставке, выпустившего кэплет и купившего флорлет. Пусть, как и раньше, $0 < t < T$, $\tau = T - t$, $R = r_s(t,T)$, $N = 1$. В табл. 1.2 показано то количество рублей, которое либо получает, либо тратит участник в каждый момент времени. Знак "+" отвечает получению, знак "−" — выплате денег участником.

То есть при любом из возможных в момент времени T состояний экономики, $X \geqslant R$ или $X < R$, суммарные платежи по данному портфелю в момент времени T равны 0. Поэтому должны быть равны 0 и суммарные платежи в момент времени 0. Таким образом, доказано, что между ценами данных финансовых инструментов должно выполняться приведенное выше соотношение.

Отсроченный своп — это набор отсроченных соглашений о форвардных ставках. *Кэп* — это набор кэплетов. *Флор* — это набор флорлетов. Цена отсроченного свопа равна сумме цен составляющих его финансовых инструментов, то есть отсроченных соглашений о форвардных ставках. Так же цена кэпа равна сумме цен составляющих его кэплетов, цена флора равна сумме цен составляющих его флорлетов. Упомянем еще об одном процентном инструменте. *Коллар* — это купленный кэп и проданный флор с одними и теми же датами измерения плавающей процентной ставки и датами выплаты, но с разными фиксированными процентными ставками.

Так же, как цена соглашения о форвардной ставке $(FRA)_0$, из соображений отсутствия арбитражных возможностей могут быть рассчитаны цены $(Arrears\,FRA)_0$, $(Caplet)_0$, $(Floorlet)_0$. Но это значительно более трудная и тонкая работа. Трудности возникают, во многом, по следующей причине. Если зафиксировать какое-нибудь $T > 0$ и рассмотреть цены облигаций $P(t, T+t)$, отвечающие различным моментам времени t, то эти цены не будут одинаковыми (и, следовательно, не будут одинаковыми процентные ставки $r_s(t, T+t)$), и размах колебаний цен $P(t, T+t)$

при изменении t существенно влияет на цены многих процентных деривативов, в том числе отсроченных соглашений о форвардных ставках, кэплетов и флорлетов (больше того, следует учитывать размахи колебаний при различных T, но на этом мы пока не останавливаемся). То, что цены соглашений о форвардных ставках $(FRA)_0$ не зависят от размахов этих колебаний, позволяет провести оценку данных соглашений, используя только методы элементарной математики. Для оценки других процентных деривативов необходимо моделировать динамику цен бескупонных облигаций или тех или иных ставок, используя аппарат высшей математики.

Для моделирования динамики процентных ставок и цен облигаций используются случайные процессы, как с непрерывным, так и с дискретным временем. Такой случайный процесс называют *стохастической моделью* для процентной ставки или для цены. В достаточном для целей настоящей книги объеме теория случайных процессов изложена, например, в учебнике [69][4].

Из случайных процессов с непрерывным временем мы будем рассматривать только случайные процессы $\eta(t)$, являющиеся решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$d\eta = m(\eta, t)dt + s(\eta, t)dz_t,$$

где z_t — стандартное броуновское движение. Несколько раз

[4]Это не следует рассматривать как позицию автора, что другие, более продвинутые результаты теории случайных процессов в финансовых расчетах не нужны. Если бы в данной книге рассматривались валютные инструменты, то, возможно, изложение не удалось бы построить без использования, например, теоремы Гирсанова о существовании такой замены мер, после которой рассматриваемый случайный процесс становится мартингалом.

будет использована *формула Ито*, являющаяся стохастическим аналогом формулы дифференцирования сложной функции.

Приведем многомерную формулу Ито, но ограничимся рассмотрением случая двух стохастических дифференциальных уравнений

$$d\eta_1 = m_1 dt + s_1 dz_t,$$

$$d\eta_2 = m_2 dt + s_2 dz_t$$

с одним и тем же стандартным броуновским движением z_t. Тогда при выполнении определенных условий для коэффициентов уравнений и числовой функции $F(y_1, y_2, t)$ случайный процесс $F(\eta_1, \eta_2, t)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dF(\eta_1, \eta_2, t) =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial y_i} m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} s_i s_j \right) dt +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial y_i} s_i \right) dz_t$$

(см., например, [44, 69]).

При проведении расчетов требуется не только выбрать форму случайных процессов, используемых в качестве математических моделей для тех или иных экономических показателей, но и определить конкретные числовые значения для всех необходимых параметров данной стохастической модели. Для этого следует использовать соответствующие статистические данные. Методы, применяемые для решения этой задачи, далеко не прямолинейны. Эти методы обсуждаются, например, в [58]. Нами в настоящей книге рассматриваются только задачи, возникающие после того, как все требуемые числовые значения для параметров случайных процессов определены.

Исходя из выбранных стохастических моделей, строится метод оценки деривативов, например тот или иной вариант метода решеток. Если метод оценки предназначен для достаточно широкого класса процентных деривативов, то интересный тест — попытаться оценить этим методом бескупонную облигацию с номиналом 1 руб. Желательно, чтобы для любого момента времени $T > 0$ цена в момент времени 0 облигации с погашением в момент времени T, рассчитанная данным методом, совпадала с $P(0,T)$. Это свойство в чем-то аналогично свойству консервативности, если сравнивать методы оценки деривативов с алгоритмами вычислительной физики. Первые методы оценки процентных деривативов, в том числе и такие, признаваемые сегодня классическими, как метод Васичека [65] и метод Кокса — Ингерсолла — Росса [23], данным свойством не обладают. Метод оценки деривативов, обладающий данным свойством, был предложен в работе Хо и Ли [38]. Затем возник еще ряд методов оценки деривативов, обладающих данным свойством: метод Халла — Уайта [39 — 42], метод Блэка — Дермана — Тоя [illegible], метод Хита — Джерроу — Мортона [35 — 37][5].

---

[5] Мы не приводим отдельное описание метода Хо — Ли. Алгоритмически этот метод совпадает с методом Хита — Джерроу — Мортона для одного из частных случаев последнего (постоянная волатильность форвардной ставки), хотя исходные посылки у метода Хо — Ли и метода Хита — Джерроу — Мортона разные. Те же исходные посылки, что и в методе Хо — Ли, приняты, например, в методе Халла — Уайта, но к ним добавлены серьезные усовершенствования.

Выше были определены просто начисляемая ставка спот $r_s(t,T)$ и просто начисляемая форвардная ставка $f_s(t,T_1,T_2)$. Оставшаяся часть этого раздела посвящена тому, чтобы ввести еще некоторые понятия и соотношения, используемые при работе с облигациями.

При любом $\Delta t > 0$ и $t < T$ *доходность бескупонной облигации* $y(t,T)$, называемая также *ставкой спот*, определяется через формулу

$$P(t,T) = \frac{1}{(1+\Delta t\, y(t,T))^{(T-t)/\Delta t}}. \tag{1.2}$$

Величина $y(t,T)$, конечно, зависит от Δt, хотя мы и не ввели эту зависимость явно в обозначение.

Очевидно, что при $\Delta t = T - t$

$$y(t,T) = r_s(t,T).$$

Непрерывно начисляемая ставка спот $r_c(t,T)$ определяется через формулу

$$P(t,T) = \exp(-r_c(t,T)\,(T-t)). \tag{1.3}$$

Можно показать, что при любых фиксированных t и T величина $y(t,T)$, определенная по формуле (1.2), стремится к $r_c(t,T)$ при $\Delta t \to 0$.

При фиксированном t набор ставок $y(t,T)$ при всех $T > t$ (при некотором выбранном $\Delta t \geqslant 0$) называется *срочной структурой процентной ставки* в момент времени t.

При $t \leqslant T_1 < T_2$ *непрерывно начисляемая форвардная ставка* $f_c(t,T_1,T_2)$ определяется через формулу

$$\exp((T_2 - T_1)\, f_c(t,T_1,T_2)) = \frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}.$$

Отсюда

$$f_c(t,T_1,T_2) = -\frac{\ln(P(t,T_2)) - \ln(P(t,T_1))}{T_2 - T_1}.$$

Мгновенная форвардная ставка $f(t,T)$ определяется как

$$f(t,T) = \lim_{\Delta t \to 0} f_c(t,T,T+\Delta t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(t,T) &= -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln(P(t,T+\Delta t)) - \ln(P(t,T))}{\Delta t} = \\ &= -\frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Покажем, что

$$P(t,T) = \exp(-\int\limits_t^T f(t,s)ds).$$

Действительно,

$$\int\limits_t^T f(t,s)ds = -\int\limits_t^T \frac{\partial \ln(P(t,s))}{\partial s}ds = \ln(P(t,t)) - \ln(P(t,T)).$$

Но $P(t,t) = 1$ и $\ln(P(t,t)) = 0$. Отсюда и получается требуемое выражение для $P(t,T)$.

Мгновенная краткосрочная ставка $r(t)$ определяется как

$$r(t) = \lim_{T\to t} r_c(t,T).$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$r_c(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}.$$

Сравнивая это выражение с формулой (1.4), видим, что $r(t) = f(t,t)$.

При $t \leqslant T_1 < T_2$ определим также *форвардную цену* бескупонной облигации $F(t,T_1,T_2) = \dfrac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$. При рассмотрении опционов на облигации цены исполнения удобно сравнивать с форвардной ценой облигации.

До сих пор мы неявно предполагали, что рассматривается *непрерывно работающая экономика*, когда t может быть любым действительным числом, и цена бескупонной облигации $P(t,T)$ определена при любом действительном $T \geqslant t$.

Наряду с непрерывно работающей экономикой в качестве модели часто используется *дискретно работающая экономика*, когда выбрано некоторое число $\tau > 0$, и в дальнейшем рассматриваются только моменты времени $k\tau$, где k — целое число.

В дискретно работающей экономике *краткосрочная ставка* $r(t,t+\tau)$ определяется как

$$r(t,t+\tau) = r_s(t,t+\tau).$$

Определенные выше мгновенная краткосрочная ставка и мгновенная форвардная ставка относятся, конечно, только к непрерывно работающей экономике.

В дискретно работающей экономике *счет денежного рынка* определяется из соотношений

$$B(0) = 1, \qquad B(t+\tau) = B(t)\,(1 + \tau\, r(t,t+\tau)).$$

В непрерывно работающей экономике счет финансового рынка определяется как

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right).$$

В дискретно работающей экономике величина $B(t)$ — это размер в момент времени t вклада, равного 1 руб. в момент времени 0, на который через каждый промежуток времени τ начислялись проценты в соответствии с существовавшей в тот момент краткосрочной ставкой, и полученные проценты каждый раз вновь вкладывались на тех же условиях. В непрерывно работающей экономике $B(t)$ имеет тот же смысл, но только проценты начисляются через бесконечно малые промежутки времени. Активом, стоимость которого растет, как счет денежного рынка, может быть банковский счет.

Случайные процессы, служащие стохастическими моделями для процентных ставок или для цен облигаций, мы будем обозначать теми же буквами, что и сами ставки или цены.

В заключение этого раздела объясним использование в данной книге терминов “актив”, “финансовый инструмент”, “дериватив”. Не пытаясь установить точной границы между этими понятиями, мы будем использовать термин “актив” в более широком значении, чем термин “финансовый инструмент”, а последний — в более широком значении, чем термин “дериватив”. Примером актива, который не является дериватом, может служить облигация, примером дериватива — опцион на облигацию.

2. Оценка права обменять один актив на другой. Применение для оценки европейских опционов на облигации, кэпов и флоров

Пусть случайные процессы $P(t)$ и $Q(t)$, служащие математическими моделями для цен двух различных активов, являются решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dP(t) &= \mu_1(t)\, P(t)\, dt + \nu_1(t)\, P(t)\, dz_t, \\ dQ(t) &= \mu_2(t)\, Q(t)\, dt + \nu_2(t)\, Q(t)\, dz_t, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где z_t — стандартное броуновское движение, одно и то же для обоих уравнений.

Пусть $w(P(t), Q(t), t)$ — стоимость в момент времени t опциона, дающего право в момент времени T обменять второй актив на первый. Нашей ближайшей целью является нахождение функции $w(p, q, t)$, дающей стоимость такого опциона в момент времени $t < T$ при $P(t) = p$, $Q(t) = q$. При этом изложение следует работам [53, 52, 41].

В момент истечения опциона T должно выполняться условие

$$w(p, q, T) = \max(p - q, 0). \tag{2.2}$$

Также при любом $\alpha > 0$ должно выполняться условие

$$w(\alpha\, p, \alpha\, q, t) = \alpha\, w(p, q, t),$$

т.к. право обменять α единиц актива 2 на α единиц актива 1 должно стоить в α раз больше, чем право обменять одну единицу на одну. По теореме Эйлера об однородных функциях выполняется соотношение

$$w - \frac{\partial w}{\partial p} p - \frac{\partial w}{\partial q} q = 0.$$

Это означает, что стоимость портфеля, состоящего из купленного опциона, выпущенных $\dfrac{\partial w}{\partial p}$ единиц актива 1 и выпущенных $\dfrac{\partial w}{\partial q}$ единиц актива 2, в любой момент времени равна 0. Соответственно, изменение стоимости такого портфеля должно быть равно 0:

$$dw - \frac{\partial w}{\partial p} dP - \frac{\partial w}{\partial q} dQ = 0. \tag{2.3}$$

Но при помощи многомерной формулы Ито получается, что

$$\begin{aligned} dw = \frac{\partial w}{\partial p} dP + \frac{\partial w}{\partial q} dQ + \frac{\partial w}{\partial t} dt+ \\ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\nu_1^2 P^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}\nu_1\nu_2 PQ + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\nu_2^2 Q^2\right) dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Сравнивая уравнения (2.3) и (2.4), мы получаем, что функция $w(p, q, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\nu_1^2 p^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}\nu_1\nu_2 pq + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\nu_2^2 q^2\right) = 0. \tag{2.5}$$

Будем использовать обозначение

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} n(y)dy, \quad \text{где} \quad n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

Теорема. Решением уравнения (2.5), удовлетворяющим начальному условию (2.2), является функция

$$w(p,q,t) = p\,N(d) - q\,N(d-\sigma), \tag{2.6}$$

где

$$d = \frac{\ln(p/q)}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}, \qquad \sigma^2 = \int_{t}^{T} (\nu_1(s) - \nu_2(s))^2 ds.$$

Доказательство этой теоремы является хотя и прямолинейным, но достаточно длинным.

Нетрудно заметить, что при $p \geqslant q$

$$\lim_{t \to T} w(p,q,t) = p - q$$

и при $p \leqslant q$

$$\lim_{t \to T} w(p,q,t) = 0,$$

т.е. рассматриваемая функция удовлетворяет начальному условию (2.2).

Проведем основные этапы проверки того, что функция $w(p,q,t)$ является решением уравнения (2.5). Напомним формулу дифференцирования интеграла по параметру. Если

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy,$$

и все функции, участвующие в определении правой части, достаточно гладкие, то

$$F'(x) = f(x, \psi(x))\, \psi'(x) - f(x, \phi(x))\, \phi'(x) + \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

Имеем

$$\frac{\partial d}{\partial p} = \frac{1}{\sigma p}, \qquad \frac{\partial d}{\partial q} = -\frac{1}{\sigma q},$$

$$\frac{\partial N(d)}{\partial p} = \frac{n(d)}{\sigma p}, \qquad \frac{\partial N(d-\sigma)}{\partial p} = \frac{n(d-\sigma)}{\sigma p},$$

$$\frac{\partial N(d)}{\partial q} = -\frac{n(d)}{\sigma q}, \qquad \frac{\partial N(d-\sigma)}{\partial q} = -\frac{n(d-\sigma)}{\sigma q}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial w}{\partial p} = N(d) + \frac{1}{\sigma}\, n(d) - \frac{q}{\sigma p}\, n(d-\sigma),$$

$$\frac{\partial w}{\partial q} = -N(d-\sigma) - \frac{p}{\sigma q}\, n(d) + \frac{1}{\sigma}\, n(d-\sigma).$$

Имеем

$$\frac{\partial n(d)}{\partial p} = -\frac{d}{\sigma p}\, n(d), \qquad \frac{\partial n(d-\sigma)}{\partial p} = -\frac{d-\sigma}{\sigma p}\, n(d-\sigma),$$

$$\frac{\partial n(d)}{\partial q} = \frac{d}{\sigma q}\, n(d), \qquad \frac{\partial n(d-\sigma)}{\partial q} = \frac{d-\sigma}{\sigma q}\, n(d-\sigma).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = -\frac{d-\sigma}{\sigma^2 p}\, n(d) + \frac{qd}{\sigma^2 p^2}\, n(d-\sigma),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} = \frac{d-\sigma}{\sigma^2 q}\, n(d) - \frac{d}{\sigma^2 p}\, n(d-\sigma),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = -\frac{(d-\sigma)p}{\sigma^2 q^2}\, n(d) + \frac{d}{\sigma^2 q}\, n(d-\sigma).$$

Получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\nu_1^2 p^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}\nu_1\nu_2 pq + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\nu_2^2 q^2 = \\ = \frac{(\nu_1-\nu_2)^2}{\sigma^2}\left(-p(d-\sigma)\, n(d) + qd\, n(d-\sigma)\right).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Положим

$$V = \int_t^T (\nu_1(s) - \nu_2(s))^2 ds.$$

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(\nu_1(t) - \nu_2(t))^2,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial V^{1/2}}{\partial t} = \frac{1}{2}\, V^{-1/2}\, \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2\sigma}\,(\nu_1-\nu_2)^2,$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \frac{(\nu_1-\nu_2)^2}{2\sigma}\left(\frac{\ln(p/q)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{\partial (d-\sigma)}{\partial t} = \frac{(\nu_1-\nu_2)^2}{2\sigma}\left(\frac{\ln(p/q)}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{\partial N(d)}{\partial t} = n(d)\,\frac{(\nu_1-\nu_2)^2}{2\sigma^2}\,(d-\sigma),$$

$$\frac{\partial N(d-\sigma)}{\partial t} = n(d-\sigma)\,\frac{(\nu_1-\nu_2)^2}{2\sigma^2}\, d.$$

Отсюда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{(\nu_1 - \nu_2)^2}{2\sigma^2} \, (p\, n(d)\, (d - \sigma) - q\, n(d - \sigma)\, d)\,. \qquad (2.8)$$

Сравнение выражений (2.7) и (2.8) показывает, что функция $w(p, q, t)$ действительно является решением уравнения (2.5).

Теорема доказана.

Полученный результат можно использовать для оценки европейских опционов на облигации. Напомним, что $P(t, T)$ — это цена в момент времени t бескупонной облигации, по которой в момент времени T гарантированно выплачивается 1 руб. Допустим, что нам надо оценить европейский опцион (колл или пут) с ценой исполнения X и с датой истечения T_1 на бескупонную облигацию с погашением в T_2, $T_1 < T_2$.

Пусть случайные процессы, служащие математическими моделями для цен бескупонных облигаций, являются решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$dP(t, T_i) = \mu_i(t)\, P(t, T_i)\, dt + \nu(t, T_i)\, P(t, T_i)\, dz_t,$$

где z_t — стандартное броуновское движение, $i = 1, 2$. Зависимость ν от времени — это принципиальное обстоятельство. Поскольку в момент погашения цена облигации известна точно, должно выполняться условие

$$\nu(t, t) = 0.$$

Рассмотрим, например, европейский опцион колл, т.е. право купить за X в момент времени T_1 облигацию с погашением в T_2. Это равносильно праву в момент времени T_1 обменять X облигаций с погашением в T_1 на облигацию с погашением в T_2. Согласно доказанной теореме цена такого права в момент времени t равна

$$c = P(t,T_2)\,N(d) - X\,P(t,T_1)\,N(d-\sigma),$$

где

$$d = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{P(t,T_2)}{X\,P(t,T_1)}\right) + \frac{\sigma}{2},$$

$$\sigma^2 = \int_t^{T_1} (\nu(s,T_2) - \nu(s,T_1))^2 ds.$$

В случае, когда время до истечения опциона $(T_1 - t)$ мало по сравнению со временем до погашения облигации $(T_2 - -t)$ (например в пять или в большее число раз меньше, см. [34]), широкое распространение получил следующий прием. Функция $\nu(t,T_2)$ считается константой ν, а функция $\nu(t,T_1)$ — нулем. При этом

$$P(t,T_1) = e^{-r\tau},$$

где $\tau = T_1 - t$. Иногда в этой формуле вместо цены облигации $P(t,T_2)$ используется форвардная цена облигации

$$F(t,T_1,T_2) = e^{r\tau} P(t,T_2),$$

обозначаемая ниже через F. Тогда формула для цены европейского опциона колл на бескупонную облигацию принимает вид

$$c = e^{-r\tau}(F\,N(d_1) - X\,N(d_2)), \qquad (2.9)$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(F/X)}{\nu\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\,\nu\sqrt{\tau}; \qquad d_2 = d_1 - \nu\sqrt{\tau}.$$

Аналогично может быть получена формула для цены европейского опциона пут, т.е. для цены права продать в момент времени T_1 за X облигацию с погашением в момент времени T_2 :

$$p = e^{-r\tau}(X\,N(-d_2) - F\,N(-d_1)). \qquad (2.10)$$

Формулы (2.9) и (2.10) — это варианты знаменитых формул для цен европейских опционов, которые первоначально были получены в работах [12, 53, 9].

Приведенные выше результаты используются также для оценки кэплетов и флорлетов. Данные деривативы были описаны в разделе 1.

Напомним условия кэплета. Рассматриваются моменты времени $0 < t < T$. Пусть $\tau = T - t$. Два участника рынка в момент времени 0 заключили между собой следующий договор. В момент времени T участник A платит $\tau \max(R - X, 0)$ руб. участнику $Б$, где $R = r_s(t, T)$ — простая процентная ставка, которая будет существовать на рынке в момент времени t для заимствований на срок τ, а X — оговоренная в договоре фиксированная ставка.

При заключении этого договора в момент времени 0 участник $Б$ должен заплатить участнику A некоторую сумму, которая называется ценой кэплета.

Мы покажем, что цена кэплета ровно в $(1+\tau X)$ раз больше цены европейского опциона пут на бескупонную облигацию с номиналом 1 руб. и с погашением в момент времени T. Дата истечения опциона пут t, цена исполнения $(1+\tau X)^{-1}$.

Стоимость кэплета в момент времени T равна

$$\tau \max(R - X, 0).$$

Текущая стоимость кэплета в момент времени t равна

$$\frac{\tau}{1+\tau R}\max(R-X,0).$$

Имеем

$$\frac{\tau}{1+\tau R}\max(R-X,0)=\max\left(\frac{\tau R-\tau X}{1+\tau R},0\right)=$$

$$\max\left(1-\frac{1+\tau X}{1+\tau R},0\right)=(1+\tau X)\max\left(\frac{1}{1+\tau X}-\frac{1}{1+\tau R},0\right).$$

Осталось заметить, что

$$\frac{1}{1+\tau R}=P(t,T),$$

т.е.

$$\max\left(\frac{1}{1+\tau X}-\frac{1}{1+\tau R},0\right)$$

— это стоимость опциона пут в момент времени t. Но раз в момент времени t цена кэплета совпадает с ценой $(1+\tau X)$ опционов пут, то и в момент времени 0 эти цены должны совпадать. А задача оценки европейских опционов колл и пут на бескупонные облигации нами разобрана выше.

Напомним также условия флорлета. Два участника рынка в момент времени 0 заключили между собой следующий договор.

В момент времени T участник A платит $\tau\max(X-R,0)$ руб. участнику $Б$, где $R=r_s(t,T)$, а X — оговоренная в договоре фиксированная ставка. При заключении этого договора в момент времени 0 участник $Б$ должен заплатить участнику A некоторую сумму, которая называется ценой флорлета.

Текущая стоимость флорлета в момент времени t равна

$$\frac{\tau}{1+\tau R}\max(X-R,0) = (1+\tau X)\max\left(\frac{1}{1+\tau R}-\frac{1}{1+\tau X},0\right).$$

Поэтому цена флорлета совпадает с ценой $(1+\tau X)$ европейских опционов колл на бескупонную облигацию с номиналом 1 руб. и с погашением в момент времени T. Дата истечения опциона колл t, цена исполнения $(1+\tau X)^{-1}$.

3. Примеры хеджирования европейских опционов

Пусть финансовая компания продала за 20 тыс. руб. европейский опцион, дающий право его владельцу купить у этой финансовой компании через 3 месяца 1 млн. бескупонных облигаций с номиналом 1 руб. и с погашением через 5 лет по 0,5 руб. за облигацию. В дальнейшем, отметим, не используется, что погашение облигаций производится именно через 5 лет, важно только, что оно производится через достаточно большой промежуток времени; срок 5 лет назван только для конкретности. Бескупонные облигации с номиналом 1 руб. и с погашением через 5 лет в этом разделе будем называть просто облигациями, другие облигации в данном разделе не рассматриваются.

Поскольку обычно используется годовая процентная ставка, за единицу измерения времени удобно принять год, что в дальнейшем и сделано; при этом время до истечения опциона $\tau = 0,25$. Предположим, что цена облигации P в момент времени 0 (когда был продан опцион) равна 0,4901 руб., волатильность цены облигации $\nu = 0,15$. Цена исполнения X, как уже было сказано, равна 0,5 руб. Предположим также, что непрерывно начисляемая процентная ставка r одинакова для всех сроков заимствования до 3-х месяцев включительно и равна 0,08; больше того, предположим, что ставка r для таких сроков заимствования остается неизменной в течение этих 3-х месяцев. В разделе 2 было показано, что при таких допущениях, когда время до истечения опциона мало по сравнению с временем до погашения облигаций, и краткосрочные ставки могут считаться постоянными, цена европейского опциона колл может быть рассчитана по формуле (2.9). Подчеркнем, что в соответствии с принятыми допущениями, постоянными считаются краткосрочные ставки, а долгосрочные ставки меняются случайным образом. Поэтому и цена облигации со сроком погашения через 5 лет меняется в эти 3 месяца случайным образом.

Рассчитанная по формуле (2.9) цена такого опциона на 1 млн. облигаций примерно равна 14,7 тыс. руб. Таким образом, финансовая компания продала опцион приблизительно на 5 тыс. руб. дороже, чем он, по ее оценкам, стоит.

Мы рассмотрим вопрос, какую стратегию хеджирования может выбрать финансовая компания, чтобы оградить свою прибыль от риска, связанного с колебаниями цены облигации.

Однако сначала рассмотрим две стратегии, при которых этот риск присутствует.

Первая стратегия состоит в том, чтобы не делать ничего. То есть весь портфель финансовой компании по данному проекту состоит из одного короткого (проданного) опциона колл. В этом случае говорят, что финансовая компания имеет *непокрытую позицию.* Если по прошествии 3-х месяцев с момента продажи опциона цена облигации будет меньше 0,5 руб., то опцион останется неисполненным, и 20 тыс. руб., полученные при продаже опциона, составят прибыль финансовой компании. В этом случае непокрытая позиция оказывается самой хорошей. Но предположим, что цена облигации через 3 месяца составит, например, 0,62 руб. В этом случае финансовая компания выплатит владельцу опциона 120 тыс. руб. Убытки финансовой компании — около 100 тыс. руб.

Вторая стратегия состоит в том, чтобы одновременно с продажей опциона колл купить 1 млн. облигаций. В этом случае говорят, что финансовая компания имеет *покрытую позицию*. Одновременно с продажей опциона колл финансовая компания потратила примерно 490 тыс. руб. на покупку облигаций. Если по прошествии 3-х месяцев цена облигации будет выше 0,5 руб., то такая стратегия себя оправдает. Компания продаст облигации владельцу опциона по 0,5 руб. и будет иметь в итоге прибыль около 30 тыс. руб. Но если по прошествии 3-х месяцев цена облигации будет, например, 0,4 руб., то убытки финансовой компании составят около 70 тыс. руб.

Широкое распространение получила стратегия, называемая *дельта хеджированием*. Чтобы пояснить суть этой стратегии, обратимся к рассмотренному в разделе 2 опциону, дающему право в некоторый момент времени обменять один актив на другой. При рассмотрении этого опциона было показано, что

$$w - \frac{\partial w}{\partial p} p - \frac{\partial w}{\partial q} q = 0.$$

Здесь w — цена опциона, p — цена актива 1, q — цена актива 2. То есть портфель, состоящий из одного купленного опциона, из выпущенных $\frac{\partial w}{\partial p}$ единиц актива 1 и из выпущенных $\frac{\partial w}{\partial q}$ единиц актива 2, имеет нулевую стоимость.

В том примере, который мы сейчас рассматриваем, актив 1 — это банковский счет с постоянной процентной ставкой, начисляемой непрерывно. Другими словами, актив 1 — это заемные средства, используемые для покупки облигаций или, наоборот, средства, полученные от выпуска облигаций и положенные на банковский счет. Активом 2 является облигация. Опасность неблагоприятного изменения цены опциона связана только с изменением цены этой облигации. Величина $\frac{\partial w}{\partial q}$ называется *дельтой* опциона и показывает, какое число облигаций должно входить в портфель, содержащий один опцион, чтобы эту опасность исключить.

Напомним, что согласно формуле (2.9) цена европейского опциона колл

$$c = P\,N(d_1) - e^{-r\tau} X\,N(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(P/e^{-r\tau} X)}{\nu\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\,\nu\sqrt{\tau}; \qquad d_2 = d_1 - \nu\sqrt{\tau}.$$

Цена европейского опциона пут

$$p = e^{-r\tau} X\,N(-d_2) - P\,N(-d_1).$$

Выведем формулу для дельты европейского опциона колл, т.е. для величины $\frac{\partial c}{\partial P}$. Используя формулы

$$\frac{\partial d_1}{\partial P} = \frac{1}{\nu\sqrt{\tau}P}, \qquad \frac{\partial N(d_1)}{\partial P} = \frac{n(d_1)}{\nu\sqrt{\tau}P},$$

где $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$, для европейского опциона колл получаем

$$\frac{\partial c}{\partial P} = N(d_1) + \frac{1}{\nu\sqrt{\tau}}\left[n(d_1) - \frac{e^{-r\tau} X}{P}\,n(d_2)\right].$$

Используя обозначение $\sigma = \nu\sqrt{\tau}$, выражение в квадратных скобках приводим к виду

$$n(d_1) - e^{-\ln(P/e^{-r\tau}X)}\, n(d_1 - \sigma).$$

Пусть $A = \ln(P/e^{-r\tau}X)$. Тогда выражение в квадратных скобках с точностью до коэффициента $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ равно

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)^2\right) -$$

$$-\exp(-A)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)-\sigma\right)^2\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)^2\right) = 0.$$

Поэтому дельта европейского опциона колл

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial P} = N(d_1).$$

Аналогично может быть получено, что дельта европейского опциона пут

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial P} = N(d_1) - 1.$$

Напомним, что мы рассматриваем пример, когда финансовая компания в момент времени 0 продала за 20 тыс. руб. европейский опцион колл на право покупки 1 млн. облигаций в момент времени 0,25 по 0,5 руб. за облигацию. По расчетам финансовой компании эта операция должна принести ей около 5 тыс. руб. прибыли, так как "справедливая" цена опциона — это 14,7 тыс. руб.

Чтобы получить эту прибыль при любом возможном изменении цены облигации финансовая компания решила использовать стратегию дельта хеджирования. Кроме опциона, финансовая компания создает портфель из двух активов, из облигаций и из банковского счета с постоянной процентной ставкой, начисляемой непрерывно. В нулевой момент времени стоимость этого портфеля равна 0. Компания стремится к тому, чтобы в каждый момент времени в этом портфеле было $\Delta \cdot 1000000$ облигаций. Величина Δ зависит от текущей цены облигации. Мы считаем, что компания корректирует портфель через интервалы времени $\Delta t = 0,01$.

В табл. 3.1 и 3.2 приведены параметры портфеля для двух различных сценариев изменения цены облигации в период времени $0 \leqslant t \leqslant 0,25$. Каждая строка табл. 3.1 и 3.2 отвечает одному моменту времени t. В столбцах табл. 3.1 — 3.6 приведены следующие величины.

(1) Цена облигации $P(t,T_b)$ в каждый момент времени $t = k\,\Delta t$, $k = 0,1,\ldots,25$; $T_b = 5$.

(2) Дельта опциона Δ в каждый момент времени t.

(3) Общее число облигаций в портфеле $\Delta \cdot 1000000$ в момент времени t.

(4) Число облигаций N, купленных в момент времени t.

(5) Стоимость купленных облигаций $N\,P(t,T_b)$.

(6) Проценты i на взятый ранее заем, начисленные за период времени $(t-\Delta t, t)$.

(7) Размер займа в момент времени t : размер займа в момент времени $t-\Delta t$, увеличенный на $N\,P(t,T_b)+i$.

Табл. 3.1 отвечает случаю, когда к моменту истечения опцион колл оказался в деньгах.

Таблица 3.1. *Дельта хеджирование европейского опциона колл на бескупонную облигацию; в момент истечения опциона цена облигации больше цены исполнения*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,4901	0,5150	514956	514956	252379,6	0,0	252379,6
0,4906	0,5163	516309	1353	663,8	202,0	253245,4
0,4946	0,5558	555782	39473	19522,6	202,7	272970,7
0,4827	0,4149	414941	-140841	-67985,4	218,5	205203,8
0,4856	0,4420	441983	27042	13132,0	164,2	218500,0
0,4885	0,4704	470447	28464	13905,3	174,9	232580,1
0,4884	0,4624	462442	-8005	-3909,5	186,1	228856,7
0,4909	0,4874	487449	25007	12275,2	183,2	241315,1
0,4983	0,5776	577575	90126	44909,6	193,1	286417,8
0,5070	0,6825	682508	104933	53200,0	229,2	339847,1
0,5265	0,8695	869530	187022	98464,9	272,0	438584,0
0,5277	0,8825	882462	12932	6823,9	351,0	445758,8
0,5252	0,8705	870469	-11993	-6298,8	356,7	439816,8
0,5065	0,6767	676733	-193736	-98123,6	352,0	342045,2
0,5108	0,7361	736119	59386	30334,5	273,7	372653,5
0,5112	0,7446	744596	8477	4333,1	298,2	377284,8
0,5030	0,6231	623079	-121517	-61117,9	301,9	316468,8
0,5129	0,7799	779857	156778	80408,9	253,3	397131,0
0,5195	0,8696	869579	89722	46609,5	317,8	444058,3
0,5222	0,9081	908148	38569	20139,3	355,4	464553,0
0,5175	0,8767	876732	-31416	-16256,2	371,8	448668,6
0,5120	0,8185	818523	-58209	-29800,8	359,1	419226,8
0,5170	0,9178	917775	99252	51310,6	335,5	470873,0
0,5196	0,9710	970954	53179	27629,7	376,8	498879,5
0,5133	0,9653	965295	-5659	-2905,0	399,3	496373,8
0,5175	1,0000	1000000	34705	17958,9	397,3	514729,9

Табл. 3.2 отвечает случаю, когда к моменту истечения опцион колл оказался вне денег.

Таблица 3.2. *Дельта хеджирование европейского опциона колл на бескупонную облигацию; в момент истечения опциона цена облигации меньше цены исполнения*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,4901	0,5150	514956	514956	252379,6	0,0	252379,6
0,4964	0,5794	579409	64453	31996,1	202,0	284577,7
0,4869	0,4689	468897	-110512	-53805,5	227,8	231000,0
0,4891	0,4883	488334	19437	9505,8	184,9	240690,6
0,4883	0,4744	474371	-13963	-6818,8	192,6	234064,4
0,4784	0,3492	349246	-125125	-59855,4	187,3	174396,4
0,4591	0,1489	148943	-200303	-91953,6	139,6	82582,4
0,4635	0,1756	175641	26698	12375,2	66,1	95023,7
0,4641	0,1700	169986	-5655	-2624,4	76,0	92475,3
0,4632	0,1513	151325	-18661	-8643,8	74,0	83905,5
0,4611	0,1234	123359	-27966	-12895,3	67,2	71077,4
0,4576	0,0881	88132	-35227	-16118,9	56,9	55015,4
0,4561	0,0696	69626	-18506	-8441,2	44,0	46618,3
0,4530	0,0456	45598	-24028	-10884,6	37,3	35771,0
0,4628	0,0880	87986	42388	19616,2	28,6	55415,8
0,4484	0,0177	17718	-70268	-31509,0	44,4	23951,1
0,4475	0,0113	11294	-6424	-2875,0	19,2	21095,2
0,4493	0,0095	9459	-1835	-824,5	16,9	20287,6
0,4355	0,0004	447	-9012	-3924,4	16,2	16379,5
0,4452	0,0013	1297	850	378,4	13,1	16771,0
0,4489	0,0010	1035	-262	-117,6	13,4	16666,8
0,4545	0,0011	1098	63	28,6	13,3	16708,8
0,4508	0,0001	51	-1047	-472,0	13,4	16250,1
0,4465	0,0000	0	-51	-22,8	13,0	16240,4
0,4462	0,0000	0	0	0,0	13,0	16253,4
0,4338	0,0000	0	0	0,0	13,0	16266,4

В обоих случаях цена облигации в разные моменты времени определялась при помощи датчика случайных чисел по формуле

$$\ln P(t+\Delta t, T_b) = \ln P(t, T_b) + (r - \nu^2/2)\,\Delta t + \nu\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (3.1)$$

где ε — значение нормальной случайной величины с математическим ожиданием 0 и с дисперсией 1. Для разных моментов времени $t = 0; 0{,}01; \ldots; 0{,}24$ используются значения независимых случайных величин ε.

При сценарии, представленном в табл. 3.1, в момент времени 0,25 компания имеет 1 млн. облигаций и долг около 514,7 тыс. руб. Согласно условиям опциона она продает облигации за 500 тыс. руб. Затраты компании на создание и поддержание данного портфеля составили около 14,7 тыс. руб., что практически совпадает с расчетной ценой опциона. Поскольку при продаже опциона компания получила 20 тыс. руб., ее прибыль от всего проекта действительно составляет около 5 тыс. руб.

При сценарии, представленном в табл. 3.2, затраты компании составили около 16,3 тыс. руб. С учетом полученных в момент времени 0 за опцион 20 тыс. руб. прибыль компании составила около 4 тыс. руб.

Несколько изменим рассматриваемый пример. Пусть опцион, который в момент времени 0 продала финансовая компания, — это не европейский опцион колл, а европейский опцион пут. Все остальные величины не меняются: продан опцион за 20 тыс. руб., время до истечения опциона $\tau = 0{,}25$, цена исполнения $X = 0{,}5$ руб. Рассчитанная по формуле (2.10) цена европейского опциона пут на 1 млн. облигаций примерно равна 14,7 тыс. руб. (в данном случае эта цена совпадает с ценой европейского опциона колл).

Табл. 3.3 отвечает случаю, когда к моменту истечения опцион пут оказался вне денег.

Таблица 3.3. *Дельта хеджирование европейского опциона пут на бескупонную облигацию; в момент истечения опциона цена облигации больше цены исполнения*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,4901	-0,4850	-485043	-485043	-237719,3	0,0	-237719,3
0,4906	-0,4837	-483690	1353	663,8	-190,3	-237245,7
0,4946	-0,4442	-444217	39473	19522,6	-189,9	-217912,9
0,4827	-0,5851	-585058	-140841	-67985,4	-174,4	-286072,7
0,4856	-0,5580	-558016	27042	13132,0	-228,9	-273169,7
0,4885	-0,5296	-529552	28464	13905,3	-218,6	-259483,1
0,4884	-0,5376	-537557	-8005	-3909,5	-207,7	-263600,3
0,4909	-0,5126	-512550	25007	12275,2	-211,0	-251536,0
0,4983	-0,4224	-422424	90126	44909,6	-201,3	-206827,7
0,5070	-0,3175	-317491	104933	53200,0	-165,5	-153793,2
0,5265	-0,1305	-130469	187022	98464,9	-123,1	-55451,4
0,5277	-0,1175	-117537	12932	6823,9	-44,4	-48671,9
0,5252	-0,1295	-129530	-11993	-6298,8	-39,0	-55009,6
0,5065	-0,3233	-323266	-193736	-98123,6	-44,0	-153177,3
0,5108	-0,2639	-263880	59386	30334,5	-122,6	-122965,3
0,5112	-0,2554	-255403	8477	4333,1	-98,4	-118730,7
0,5030	-0,3769	-376920	-121517	-61117,9	-95,0	-179943,6
0,5129	-0,2201	-220142	156778	80408,9	-144,0	-99678,8
0,5195	-0,1304	-130420	89722	46609,5	-79,8	-53149,0
0,5222	-0,0919	-91851	38569	20139,3	-42,5	-33052,3
0,5175	-0,1233	-123267	-31416	-16256,2	-26,5	-49334,9
0,5120	-0,1815	-181476	-58209	-29800,8	-39,5	-79175,2
0,5170	-0,0822	-82224	99252	51310,6	-63,4	-27928,0
0,5196	-0,0290	-29045	53179	27629,7	-22,4	-320,6
0,5133	-0,0347	-34704	-5659	-2905,0	-0,3	-3225,9
0,5175	0,0000	0	34704	17958,3	-2,6	14729,9

Табл. 3.4 отвечает случаю, когда к моменту истечения опцион пут оказался в деньгах.

Таблица 3.4. *Дельта хеджирование европейского опциона пут на бескупонную облигацию; в момент истечения опциона цена облигации меньше цены исполнения*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,4901	-0,4850	-485043	-485043	-237719,3	0,0	-237719,3
0,4964	-0,4206	-420590	64453	31996,1	-190,3	-205913,4
0,4869	-0,5311	-531102	-110512	-53805,5	-164,8	-259883,7
0,4891	-0,5117	-511665	19437	9505,8	-208,0	-250585,9
0,4883	-0,5256	-525628	-13963	-6818,8	-200,5	-257605,2
0,4784	-0,6508	-650753	-125125	-59855,4	-206,2	-317666,8
0,4591	-0,8511	-851056	-200303	-91953,6	-254,2	-409874,6
0,4635	-0,8244	-824358	26698	12375,2	-328,0	-397827,4
0,4641	-0,8300	-830013	-5655	-2624,4	-318,4	-400770,2
0,4632	-0,8487	-848674	-18661	-8643,8	-320,7	-409734,8
0,4611	-0,8766	-876640	-27966	-12895,3	-327,9	-422958,0
0,4576	-0,9119	-911867	-35227	-16118,9	-338,5	-439415,3
0,4561	-0,9304	-930373	-18506	-8441,2	-351,7	-448208,2
0,4530	-0,9544	-954401	-24028	-10884,6	-358,7	-459451,5
0,4628	-0,9120	-912013	42388	19616,2	-367,7	-440203,0
0,4484	-0,9823	-982281	-70268	-31509,0	-352,3	-472064,4
0,4475	-0,9887	-988705	-6424	-2875,0	-377,8	-475317,2
0,4493	-0,9905	-990540	-1835	-824,5	-380,4	-476522,1
0,4355	-0,9996	-999552	-9012	-3924,4	-381,4	-480827,9
0,4452	-0,9987	-998702	850	378,4	-384,8	-480834,3
0,4489	-0,9990	-998964	-262	-117,6	-384,8	-481336,7
0,4545	-0,9989	-998901	63	28,6	-385,2	-481693,3
0,4508	-0,9999	-999948	-1047	-472,0	-385,5	-482550,8
0,4465	-1,0000	-999999	-51	-22,8	-386,2	-482959,8
0,4462	-1,0000	-1000000	-1	-0,4	-386,5	-483346,7
0,4338	-1,0000	-1000000	0	0,0	-386,8	-483733,6

Вновь используется стратегия дельта хеджирования. Создается портфель из облигаций и из банковского счета, в котором в каждый момент времени, в который производится пересмотр портфеля, находится $\Delta \cdot 1000000$ облигаций.

В табл. 3.3 и 3.4 приведены параметры портфелей для тех же цен облигаций, что и в табл. 3.1 и 3.2 соответственно.

При сценарии, представленном в табл. 3.3, затраты компании на создание и поддержание портфеля составили около 14,7 тыс. руб. С учетом полученных в момент времени 0 за опцион 20 тыс. руб. прибыль компании составила около 5 тыс. руб.

При сценарии, представленном в табл. 3.4, в момент времени 0,25 финансовая компания имеет на банковском счете около 483,7 тыс. руб., обязательство по опциону купить за 500 тыс. руб. 1 млн. облигаций и обязательство поставить 1 млн. облигаций, закрывая короткую позицию. После выполнения обоих обязательств затраты компании составят около 16,3 тыс. руб. С учетом полученных в момент времени 0 за опцион 20 тыс. руб. прибыль финансовой компании составляет около 4 тыс. руб.

Теперь предположим, что финансовая компания ошиблась при определении волатильности цены облигации. “Настоящая” волатильность, то есть та волатильность ν, которая используется в формуле (3.1), равна 0,3. А финансовая компания при расчете цены опциона в момент времени 0 и при расчетах дельт в течение трех месяцев исходила из волатильности цены облигации 0,15. “Справедливая” цена европейского опциона колл была определена финансовой компанией примерно в 14,7 тыс. руб., и данный опцион был продан за 20 тыс. руб.

Табл. 3.5 отвечает случаю, когда к моменту истечения опцион колл оказался в деньгах.

Таблица 3.5. *Дельта хеджирование европейского опциона колл на бескупонную облигацию при неверно определенной волатильности цены облигации; в момент истечения опциона цена облигации больше цены исполнения*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,4901	0,5150	514956	514956	252379,6	0,0	252379,6
0,4889	0,4972	497176	-17780	-8692,9	202,0	243888,7
0,4762	0,3502	350162	-147014	-70014,7	195,2	174069,1
0,5107	0,7216	721565	371403	189691,6	139,3	363900,1
0,5055	0,6697	669704	-51861	-26217,8	291,2	337973,5
0,4936	0,5313	531346	-138358	-68287,3	270,5	269956,7
0,4949	0,5432	543245	11899	5888,9	216,1	276061,6
0,5041	0,6509	650942	107697	54295,1	220,9	330577,6
0,5031	0,6372	637150	-13792	-6938,8	264,6	323903,4
0,5169	0,7878	787804	150654	77879,9	259,2	402042,5
0,5106	0,7252	725161	-62643	-31988,4	321,8	370375,9
0,5013	0,6074	607431	-117730	-59013,9	296,4	311658,5
0,4854	0,3711	371080	-236351	-114722,4	249,4	197185,5
0,4903	0,4347	434729	63649	31210,3	157,8	228553,6
0,5076	0,6938	693774	259045	131501,6	182,9	360238,1
0,5011	0,5939	593908	-99866	-50040,3	288,3	310486,1
0,4857	0,3218	321793	-272115	-132164,1	248,5	178570,5
0,4812	0,2316	231628	-90165	-43383,3	142,9	135330,1
0,4865	0,2991	299102	67474	32828,4	108,3	168266,8
0,4888	0,3199	319945	20843	10188,0	134,7	178589,5
0,4918	0,3604	360357	40412	19874,3	142,9	198606,7
0,5004	0,5584	558437	198080	99115,3	158,9	297880,9
0,5260	0,9801	980056	421619	221762,3	238,4	519881,6
0,5526	1,0000	999999	19943	11019,8	416,1	531317,4
0,5722	1,0000	1000000	1	0,6	425,2	531743,2
0,5781	1,0000	1000000	0	0,0	425,6	532168,8

Табл. 3.6 отвечает случаю, когда к моменту истечения опцион колл оказался вне денег.

Таблица 3.6. *Дельта хеджирование европейского опциона колл на бескупонную облигацию при неверно определенной волатильности цены облигации; в момент истечения опциона цена облигации меньше цены исполнения*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,4901	0,5150	514956	514956	252379,6	0,0	252379,6
0,5018	0,6361	636075	121119	60782,3	202,0	313363,9
0,4933	0,5415	541534	-94541	-46637,4	250,8	266977,3
0,4834	0,4231	423067	-118467	-57269,0	213,7	209921,9
0,4823	0,4028	402795	-20272	-9776,8	168,0	200313,1
0,4554	0,1315	131501	-271294	-123559,1	160,3	76914,4
0,4580	0,1405	140490	8989	4116,6	61,6	81092,5
0,4467	0,0649	64916	-75574	-33755,4	64,9	47402,0
0,4307	0,0154	15399	-49517	-21329,4	37,9	26110,5
0,4213	0,0045	4516	-10883	-4585,1	20,9	21546,3
0,4156	0,0016	1601	-2915	-1211,4	17,2	20352,1
0,4329	0,0097	9693	8092	3503,4	16,3	23871,8
0,4332	0,0075	7497	-2196	-951,3	19,1	22939,6
0,4211	0,0010	991	-6506	-2739,9	18,4	20218,1
0,4179	0,0003	334	-657	-274,6	16,2	19959,7
0,4129	0,0001	60	-274	-113,1	16,0	19862,5
0,4250	0,0003	303	243	103,3	15,9	19981,7
0,4619	0,0447	44711	44408	20510,0	16,0	40507,7
0,4399	0,0011	1081	-43630	-19192,1	32,4	21348,0
0,4269	0,0000	16	-1065	-454,7	17,1	20910,4
0,4262	0,0000	1	-15	-6,4	16,7	20920,7
0,4251	0,0000	0	-1	-0,4	16,7	20937,0
0,4141	-0,0000	0	0	0,0	16,8	20953,8
0,4441	0,0000	0	0	0,0	16,8	20970,6
0,4396	-0,0000	0	0	0,0	16,8	20987,3
0,4292	0,0000	0	0	0,0	16,8	21004,1

При сценарии, представленном в табл. 3.5, затраты компании на создание и поддержание портфеля составили около 32 тыс. руб. Поскольку в момент времени 0 финансовая компания получила 20 тыс. руб., ее убытки от всего проекта составляют около 12 тыс. руб.

При сценарии, представленном в табл. 3.6, затраты компании на создание и поддержание портфеля составили 21 тыс. руб. Поскольку в момент времени 0 финансовая компания получила 20 тыс. руб., ее убытки от всего проекта составляют около 1 тыс. руб.

Если в расчете цены опциона колл по форммуле (2.9) принять волатильность цены облигации $\nu = 0{,}3$, то окажется, что цена рассматриваемого опциона примерно равна 29,3 тыс. руб.

Дельта хеджирование — это метод защиты от рыночных рисков, имеющий большое практическое значение. Существуют многочисленные усовершенствования этого метода. Например, при определении стратегии хеджирования деривативa, цена которого описывается функцией $w(S,t)$, где S — цена основного актива, t — время, может использоваться не только величина $\Delta = \dfrac{\partial w}{\partial S}$, но и величина $\Gamma = \dfrac{\partial^2 w}{\partial S^2}$.

Для цен очень многих деривативов не существует столь простых аналитических формул, как формулы (2.9) и (2.10) для цен европейских опционов колл и пут на бескупонные облигации. Поэтому для определения стратегий хеджирования используются цены и дельты деривативов, рассчитанные численными методами.

В оставшейся части книги мы сосредоточимся, главным образом, на оценке деривативов. Задачи хеджирования мы коснемся еще раз только в конце книги в разделе 9.

4. Оценка деривативов с использованием стохастической модели для краткосрочных ставок (метод Блэка — Дермана — Тоя)

Одним из численных методов, пригодных для оценки широкого класса процентных деривативов, является метод Блэка — Дермана — Тоя, предложенный в [10].

Для расчета цены деривативa в заданный момент времени (для определенности, в момент времени 0) необходимо построить стохастическую модель для какой-то изменяющейся со временем величины, поведением которой цена деривативa определяется достаточно хорошо. В методе Блэка — Дермана — Тоя этой величиной является краткосрочная ставка.

Основная часть в методе Блэка — Дермана — Тоя — это построение данной стохастической модели, описание которой приводится ниже. После построения стохастической модели оценка деривативов производится стандартным путем; описание этого этапа также содержится в данном разделе. Затем приводятся примеры оценки деривативов.

Пусть $\tau > 0$ — это выбранный временной шаг и $\bar{T} > 0$ — некоторый момент времени, кратный τ.

Исходной информацией для построения стохастической модели являются, во-первых, доходности бескупонных облигаций $y(0, T)$ при $T = \tau, 2\tau, \ldots, \bar{T} + \tau$, соответствующие начислению процентов $1/\tau$ раз за период времени 1, или, что эквивалентно, значения дисконтной функции $P(0, T)$ при тех же T, которые связаны с доходностями $y(0,T)$ соотношением

$$P(0,T) = \frac{1}{(1+\tau\, y(0,T))^{T/\tau}},$$

и, во-вторых, *волатильности доходностей* $\sigma_y(0,T)$ при тех же T.

Волатильности доходностей имеют следующий смысл. Предполагается, что при фиксированном T доходность $y(\tau, T)$ является случайной величиной и выполняется следующее условие для дисперсии логарифма этой случайной величины:

$$D(\ln(y(\tau,T))) = \sigma_y^2(0,T)\,\tau. \tag{4.1}$$

Мы не обсуждаем, каким образом строится функция $\sigma_y(0,T)$ (как, впрочем, и функция $P(0,T)$, которую на практике часто приходится восстанавливать по ценам купонных облигаций), а считаем, что эти функции каким-то образом построены, и, исходя из них, производится построение стохастической модели для краткосрочной ставки.

Рассмотрим дискретно работающую экономику. Считается, что в момент времени $t = n\tau$, $n \geqslant 0$, экономика может находиться в одном из $(n+1)$ состояний, которые мы будем помечать индексом j, принимающим значения $0, 1, \ldots, n$ (см. рис. 4.1). Если в момент времени t экономика находится в состоянии j, то в момент времени $(t+\tau)$ экономика может находиться либо в состоянии j, либо в состоянии $(j+1)$. Переход в каждое из этих состояний равновероятен.

Построить стохастическую модель — это значит для каждого момента времени $t = n\tau$ определить случайную величину $r(t, t+\tau)$. Эта случайная величина принимает некоторое значение для каждого состояния экономики j, возможного в момент времени $t = n\tau, j = 0, 1, \ldots, n$. Данное значение следовало бы обозначить $r(j, t, t+\tau)$, однако для краткости мы будем обозначать его $r(j, t)$. Расчет краткосрочных ставок $r(j, t)$ производится для всех $t \leqslant \bar{T}$.

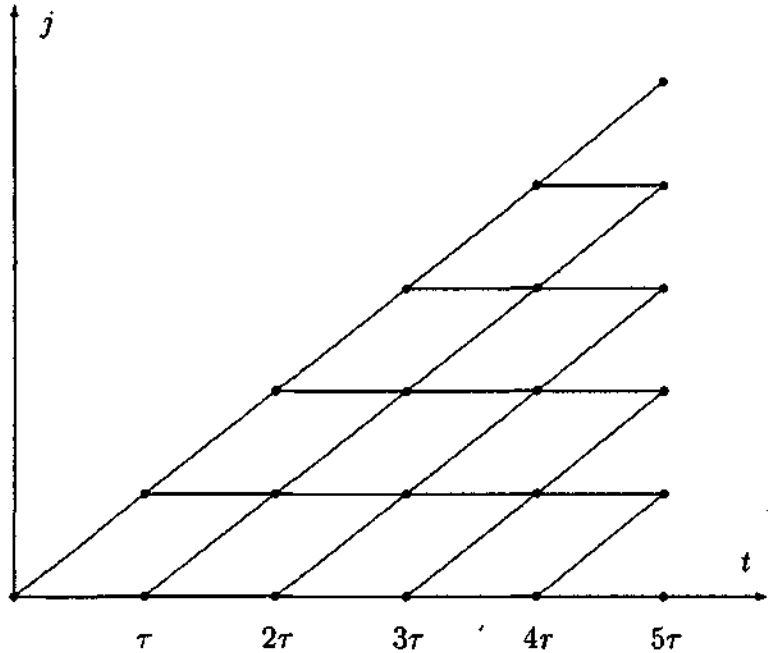

Рис. 4.1. ***Биномиальное дерево в методе Блэка — Дермана — Тоя***

Для каждой пары моментов времени t и T, такой, что $0 < t < T \leqslant \bar{T} + \tau$, и для любого $j = 0, 1, \ldots, t/\tau$ через $P(j, t, T)$ обозначим цену в момент времени t при состоянии экономики j бескупонной облигации, по которой в момент времени T выплачивается 1 руб. В частности,

$$P(j,t,t+\tau) = \frac{1}{1+\tau r(j,t)}.$$

В методе Блэка — Дермана — Тоя делается предположение, что отношение

$$\frac{r(j,t)}{r(j-1,t)}$$

зависит, вообще говоря, от t, но при фиксированном t является одним и тем же при всех $j = 1, 2, \dots, t/\tau$. (При переходе к непрерывно работающей экономике это предположение означает, что волатильность краткосрочной ставки зависит от времени, но не зависит от величины самой краткосрочной ставки.)

В силу сделанного предположения для каждого момента времени t краткосрочные ставки $r(j,t)$ определяются двумя числами, r^* и s^*, такими, что

$$r(0,t+\tau) = r^*, \tag{4.2}$$

$$r(j,t+\tau) = r(j-1,t+\tau)\,\exp(2\,s^*\sqrt{\tau}) \tag{4.3}$$

при $j = 1, \dots, (t+\tau)/\tau$. (То, что знаменатель геометрической прогрессии взят в форме $\exp(2\,s^*\sqrt{\tau})$, объясняется удобством для расчета.) Для каждого t числа r^* и s^* и надлежит определить. (Правильнее было бы писать не r^* и s^*, а $r^*(t)$ и $s^*(t)$, но мы этого не делаем, чтобы не загромождать обозначения.)

Предполагается также, что при $T > t$ цены бескупонных облигаций связаны соотношением

$$P(j,t,T) = \frac{1}{1+\tau\, r(j,t)}\cdot \frac{1}{2}\Bigg(P(j,t+\tau,T) + P(j+1,t+\tau,T)\Bigg), \tag{4.4}$$

где $j = 0, 1, \ldots, t/\tau$. Естественно

$$P(j,T,T) = 1 \quad \text{при всех} \quad j. \tag{4.5}$$

Переходим к описанию алгоритма расчета краткосрочных ставок. Очевидно, что $r(0,0) = y(0,\tau)$. Предположим, что краткосрочные ставки $r(j,t)$ определены для всех моментов времени до некоторого момента t включительно, здесь $t < \bar{T}$, и для всех состояний экономики j, соответствующих этим моментам времени.

Опишем способ определения краткосрочных ставок $r(j, t+\tau)$ при $j = 0, 1, \ldots, (t+\tau)/\tau$.

Для нахождения чисел r^* и s^*, отвечающих моменту времени $(t+\tau)$, используется итерационный процесс. Пусть выбраны некоторые начальные значения r_0^* и s_0^*, и по формулам

$$r_0(0,t+\tau) = r_0^*,$$

$$r_0(j,t+\tau) = r_0(j-1,t+\tau)\exp(2\, s_0^*\sqrt{\tau}),$$

при $j = 1, \ldots, (t+\tau)/\tau$, посчитаны "краткосрочные ставки" $r_0(j, t+\tau)$. Пусть

$$T = t + 2\tau.$$

Зная "краткосрочные ставки" $r_0(j, t+\tau)$, по формуле (4.4) с учетом (4.5) можно найти "цены бескупонных облигаций"

$$P_0(j, t+\tau, T) = \frac{1}{1+\tau\, r_0(j, t+\tau)}\, \frac{1}{2}\, (1+1)$$

при $j = 0, 1, \ldots, (t+\tau)/\tau$. Затем могут быть найдены "цены бескупонных облигаций" с погашением в момент времени T (отвечающие данным r_0^* и s_0^*) для всех предшествующих моментов времени t и для всех отвечающих этим моментам времени состояний экономики:

$$P_0(j, t, T) = \frac{1}{1+\tau\, r(j,t)} \cdot \frac{1}{2}\left(P_0(j, t+\tau, T) + P_0(j+1, t+\tau, T)\right), \tag{4.6}$$

где $j = 0, 1, \ldots, t/\tau$. В частности,

$$P_0(0, T) = \frac{1}{1+\tau\, r(0,0)}\, \frac{1}{2}\left(P_0(0, \tau, T) + P_0(1, \tau, T)\right).$$

Из формул

$$P_0(0, T) = \frac{1}{(1+\tau\, y_0(0, T))^{T/\tau}},$$

$$P_0(j, \tau, T) = \frac{1}{(1+\tau\, y_0(j, \tau, T))^{(T-\tau)/\tau}} \quad \text{при} \quad j = 1, 2,$$

могут быть найдены доходности $y_0(0, T), y_0(0, \tau, T), y_0(1, \tau, T)$ (отвечающие данным r_0^* и s_0^*). Затем из формулы

$$\frac{1}{2}\, \ln\left(\frac{y_0(1, \tau, T)}{y_0(0, \tau, T)}\right) = \sqrt{\tau}\, \sigma_{y,0}(0, T),$$

которая воспроизводит условие (4.1), определяется $\sigma_{y,0}(0,T)$. Мы хотим, чтобы полученные величины $y_0(0,T)$ и $\sigma_{y,0}(0,T)$ совпадали с исходными величинами $y(0,T)$ и $\sigma_y(0,T)$ соответственно. Но при произвольном выборе r_0^* и s_0^* совпадения, вообще говоря, не будет. Цель итерационного процесса состоит в том, чтобы добиться этого совпадения, найдя подходящие значения r_0^* и s_0^*.

Итерационный процесс можно организовать, например, следующим образом. При фиксированном s_0^* с использованием метода секущих ищется последовательность

$$r_0^*, r_1^*, \ldots, r_k^*$$

до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$|y_k(0,T) - y(0,T)| < \varepsilon_1, \tag{4.7}$$

где ε_1 — некоторое заранее выбранное маленькое число. Величина $y_i(0,T)$ строится по r_i^* при любом i точно так же, как величина $y_0(0,T)$ строится по r_0^*.

Затем выбирается следующее значение s_1^* и для него, снова с использованием метода секущих, строится последовательность

$$r_0^*, r_1^*, \ldots, r_k^*,$$

которая обеспечивает выполнение условия (4.7). В этой последовательности r_0^* и k могут быть другими, чем в первой последовательности r_i^*. Затем при помощи того же метода секущих определяется следующее значение s_2^*. Для этого значения строится своя последовательность $r_0^*, r_1^*, \ldots, r_k^*$, которая обеспечивает выполнение условия (4.7). Так происходит до тех пор, пока при некоторых r_k^* и s_l^* будут выполнены условия (4.7) и

$$|\sigma_{y,l}(0,T) - \sigma_y(0,T)| < \varepsilon_2,$$

где ε_2, как и ε_1, — некоторое заранее выбранное маленькое число. Тогда полученные r_k^* и s_l^* объявляются искомыми значениями r^* и s^*, и краткосрочные ставки для момента времени $(t+\tau)$ определяются по формулам (4.2) и (4.3).

После того, как краткосрочные ставки найдены для всех моментов времени до момента $\bar{T}$ включительно и для всех состояний экономики, отвечающих этим моментам времени, по формулам (4.4) и (4.5) рассчитываются цены бескупонных облигаций.

Существует один прием, который позволяет существенно уменьшить объем вычислительной работы при определении краткосрочных ставок. Этот прием называется *индукцией вперед*. Предложен этот прием в работе [46].

Определим величины $G(j,T)$. Положим

$$G(0,0)=1$$

и при $t \geqslant 0$

$$G(0,t+\tau)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\tau\, r(0,t)}\,G(0,t),$$

$$G(j,t+\tau)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\tau\, r(j-1,t)}\,G(j-1,t)+$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\tau\, r(j,t)}\,G(j,t)$$

для $j=1,\ldots,t/\tau$,

$$G((t+\tau)/\tau,t+\tau)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\tau\, r(t/\tau,t)}\,G(t/\tau,t).$$

Величина $G(j,T)$ может интерпретироваться как цена в момент времени 0 актива, по которому в момент времени

T выплачивается 1 руб., но только если в момент времени T экономика находится в состоянии j.

Используя формулу (4.4), можно непосредственно проверить, что цена бескупонной облигации может быть записана в виде

$$P(0, t + 2\tau) = \sum_{j=0}^{(t+\tau)/\tau} G(j, t + \tau)\, P(j, t + \tau, t + 2\tau).$$

Данное представление оказывается очень полезным при реализации метода Блэка — Дермана — Тоя на ЭВМ.

Рассмотрим вопрос об оценке активов в Методе Блэка — Дермана — Тоя.

Пусть известны цены некоторого актива $V(j, t + \tau)$ для всех возможных состояний экономики на некоторый момент времени $(t+\tau)$, т.е. для всех $j = 0, 1, \ldots, (t+\tau)/\tau$. Предположим, что никаких выплат, связанных с обладанием данным активом, в момент времени t нет. Например, если актив является облигацией, то в момент времени t не выплачиваются купоны, если актив является опционом, то в момент времени t он не может быть досрочно исполнен. Покажем, что тогда для любого $j = 0, 1, \ldots, t/\tau$ цена этого актива в момент времени t при состоянии экономики j определяется по следующей формуле, аналогичной (4.4):

$$V(j, t) = \frac{1}{1 + \tau\, r(j, t)}\, \frac{1}{2}\, \big(V(j, t + \tau) + V(j + 1, t + \tau)\big). \quad (4.8)$$

Для доказательства формулы (4.8) используется обычный прием создания синтетического актива, в данном случае портфеля из двух бескупонных облигаций с погашением в различные моменты времени T_1 и T_2, где $T_1 \geqslant t + \tau$ и

$T_2 \geqslant t+\tau$. Предположим, что в момент времени t при состоянии экономики j составлен портфель, который содержит δ_1 облигаций с погашением в момент времени T_1 и δ_2 облигаций с погашением в момент времени T_2. Стоимость этого портфеля при любом возможном в момент времени $(t+\tau)$ состоянии экономики j или $(j+1)$ должна совпадать со стоимостью рассматриваемого актива. Это означает, что δ_1 и δ_2 должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \delta_1 P(j,t+\tau,T_1) + \delta_2 P(j,t+\tau,T_2) = \\ = V(j,t+\tau) \\ \\ \delta_1 P(j+1,t+\tau,T_1) + \delta_2 P(j+1,t+\tau,T_2) = \\ = V(j+1,t+\tau). \end{cases}$$

Получив из этой системы линейных алгебраических уравнений величины δ_1 и δ_2 (рассмотрение ситуации, когда эта система вырожденная, в данном случае большого интереса не представляет), цену актива в момент времени t можно найти по формуле

$$V(j,t) = \delta_1 P(j,t,T_1) + \delta_2 P(j,t,T_2).$$

Используя найденные из решения системы линейных алгебраических уравнений выражения для δ_1 и δ_2 и формулу (4.4), нетрудно убедиться, что правая часть последней формулы совпадает с правой частью формулы (4.8).

Описанный метод определения цен актива для всех состояний экономики в момент времени t по известным ценам в момент времени $(t+\tau)$ иногда называют *индукцией назад*.

Пример 1. Рассмотрим облигацию с погашением через 6 лет с номиналом 100 руб. Кроме того, в конце каждого года по облигации выплачивается купон в размере 10 руб. Требуется определить цену европейского опциона колл на эту облигацию с датой истечения через 4 года и с ценой исполнения 102 руб. Опцион исполняется непосредственно перед выплатой соответствующего купона.

Пусть для рассматриваемого периода доходность (соответствующая начислению процентов один раз за период времени 1, то есть один раз за год) имеет вид

$$y(0,T) = 0,1 + T/200,$$

волатильность доходности

$$\sigma_y(0,T) = 0,2 - T/120.$$

Целью этого примера, как и всех последующих, является демонстрация соответствующего метода расчета. Поэтому вид функций $y(0,T)$ и $\sigma_y(0,T)$ выбран нами произвольно. Не является целью примера также детальное исследование того, как зависит ответ от всех входящих в условие величин.

Опишем расчет с $\tau = 1$. При помощи описанного алгоритма получаются следующие краткосрочные ставки для моментов времени 1, 2, 3, 4, 5 и для всех возможных в эти моменты времени состояний экономики (приведены в виде процентов).

					28,79
				24,96	22,44
			21,00	18,91	17,50
		17,17	15,47	14,33	13,64
	13,63	12,28	11,39	10,86	10,63
10,5	9,45	8,78	8,39	8,23	8,29

Краткосрочная ставка для момента времени 0 совпадает с $y(0, \tau)$.

Купонная облигация может рассматриваться, как портфель из следующих 6 облигаций:

1) бескупонная облигация с погашением через 1 год с номиналом 10 руб.;

2) бескупонная облигация с погашением через 2 года с номиналом 10 руб.;

3) бескупонная облигация с погашением через 3 года с номиналом 10 руб.;

4) бескупонная облигация с погашением через 4 года с номиналом 10 руб.;

5) бескупонная облигация с погашением через 5 лет с номиналом 10 руб.;

6) бескупонная облигация с погашением через 6 лет с номиналом 110 руб.

Цена каждой из этих 6 облигаций может быть рассчитана по формулам (4.4), (4.5) с тем отличием, что в правой части формулы (4.5) вместо 1 для первых 5 облигаций стоит 10, а для 6-й облигации — 110. Цена портфеля равна сумме цен входящих в него активов, рассчитанные таким образом цены купонной облигации для моментов времени 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (до выплаты купонов) и для всех возможных в эти моменты времени состояний экономики показаны ниже:

						110,00
					95,41	110,00
				88,12	99,84	110,00
			85,90	95,55	103,62	110,00
		87,43	95,55	102,02	106,80	110,00
	91,9	98,89	104,06	107,52	109,43	110,00
89,1	104,9	109,00	111,31	112,10	111,58	110,00

Для момента времени $t = 4$ и для всех возможных в эти моменты времени состояний экономики цены европейского опциона колл рассчитываются по формуле

$$c(j,t) = \max(S(j,t) - X, 0), \quad j = 0, 1, \dots, t/\tau,$$

где $S(j,t)$ — цена купонной облигации для различных состояний экономики, которая может принимать одно из значений 112,10, 107,52, 102,02, 95,55, 88,12; $X = 102$. Для моментов 3, 2, 1, 0 времени цены рассчитываются по формуле (4.8). Цены опциона колл приведены ниже.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & & 0,00 \\
 & & & 0,00 & 0,00 \\
 & & 0,00 & 0,01 & 0,02 \\
 & 0,49 & 1,11 & 2,49 & 5,52 \\
1,37 & 2,54 & 4,46 & 7,21 & 10,10
\end{array}$$

С точностью до 3-х десятичных знаков цена европейского опциона колл в момент времени 0

$$c_0 = 1,373 \quad \text{руб.}$$

Пример 2. Пусть при всех тех же условиях, что и в примере 1, требуется рассчитать цену европейского опциона пут на ту же купонную облигацию. Цену исполнения опциона считаем той же самой, 102 руб.

Единственное отличие этого расчета от предыдущего состоит в том, что в момент времени $t = 4$ цена опциона пут рассчитывается по формуле

$$p(j,t) = \max(X - S(j,t), 0), \quad j = 0, 1, \dots, t/\tau.$$

При расчете с $\tau = 1$ цена европейского опциона пут в момент времени 0

$$p_0 = 1,456 \quad \text{руб.}$$

Рассмотрим облигацию, по которой в моменты времени $t_1, \dots, t_n$ производятся выплаты купонов $C_1, \dots, C_n$. Рассмотрим европейские опционы колл и пут на эту облигацию с одной и той же датой истечения T и одной и той же ценой исполнения X. Пусть $t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$. Погашение облигации производится в момент времени более поздний, чем T. (Возможно, что купоны выплачиваются и после момента времени T.)

Пусть c_0 — цена опциона колл в момент времени t_0, p_0 — цена опциона пут в момент времени t_0, S_0 — цена облигации в момент времени t_0. Покажем, что при отсутствии арбитража должно выполняться соотношение

$$p_0 - c_0 + S_0 = \sum_{i=1}^{n} P(t_0, t_i)\, C_i + P(t_0, T)\, X. \tag{4.9}$$

Рассмотрим следующий портфель:

1) куплена облигация;

2) куплен пут;

3) продан колл.

Пусть в момент времени T облигация продается. Опционы в момент времени T либо исполняются, либо остаются неисполненными в зависимости от соотношения цены облигации S_T в момент времени T и X. В табл. 4.1 показан приток средств по каждой из позиций в различные моменты времени и, в нижней строке, суммарные поступления от портфеля.

Таблица 4.1. *Платежи по портфелю, состоящему из выпущенной купонной облигации, выпущенного европейского опциона пут и купленного европейского опциона колл в различные моменты времени*

	t_0	t_1	...	t_n	T при $S_T \geqslant X$	T при $S_T \leqslant X$
Облигация	$-S_0$	C_1	...	C_n	S_T	S_T
Пут	$-p_0$				0	$X - S_T$
Колл	c_0				$-(S_T - X)$	0
		C_1	...	C_n	X	

Во все моменты времени $t_1, \ldots, t_n, T$ поступления от портфеля заранее известны. Поэтому стоимость портфеля в момент времени t_0 должна быть суммой текущих стоимостей этих поступлений. Это утверждение и содержится в доказываемом равенстве (4.9).

Проверим соблюдение равенства (4.9) для опционов из примеров 1 и 2. Найдем сначала значение левой части равенства (4.9). Все необходимые величины посчитаны в примерах 1 и 2:

$$p_0 = 1,456, \quad c_0 = 1,373, \quad S_0 = 89,120.$$

Таким образом,

$$\text{левая часть} = 1,456 - 1,373 + 89,120 = 89,203.$$

Найдем значение правой части равенства (4.9). Напомним, что цена в момент времени 0 бескупонной облигации с погашением в момент времени t определяется через ее доходность по формуле

$$P(0,t) = \frac{1}{(1+\tau\, y(0,t))^{t/\tau}}.$$

В нашем случае $\tau = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&t_1 = 1, \quad y(0,1) = 0,105, \quad P(0,1) = 0,904977;\\
&t_2 = 2, \quad y(0,2) = 0,110, \quad P(0,1) = 0,811622;\\
&t_3 = 3, \quad y(0,3) = 0,115, \quad P(0,1) = 0,721399;
\end{aligned}$$

Поскольку $c_1 = c_2 = c_3 = 10$, получаем

$$\sum_{i=1}^{3} P(t_0, t_i)\, C_i = 24,380.$$

Далее

$$T = 4, \quad y(0,4) = 0,12, \quad P(0,4) = 0,635518, \quad X = 102.$$

Отсюда

$$\text{правая часть} = 89,203.$$

Итак, соотношение (4.9) для цен европейских опционов колл и пут из примеров 1 и 2 соблюдается. Это является одним из достоинств метода Блэка — Дермана — Тоя и следствием того, что облигации по методу Блэка — Дермана — Тоя оцениваются точно.

Пример 3. Пусть при всех тех же условиях, что и в примере 1, требуется рассчитать цену американского опциона колл на купонную облигацию.

Единственное отличие этого расчета от расчета в примере 1 состоит в том, что вместо формулы (4.8) используется формула

$$c(j,t) = \max\Big(S(j,t) - X,$$
$$\frac{1}{1+\tau\, r(j,t)}\,\frac{1}{2}\left(c(j,t+\tau) + c(j+1,t+\tau)\right)\Big),$$
$$j = 0, 1, \ldots, t/\tau.$$

Цены американского опциона колл с ценой исполнения 102 для моментов времени 0, 1, 2, 3, 4 и для всех возможных в эти моменты времени состояний экономики при расчете с $\tau = 1$ получаются следующие

				0,00
			0,00	0,00
		0,00	0,01	0,02
	0,49	1,11	2,49	5,52
1,90	3,70	7,00	9,31	10,10

С точностью до 3-х десятичных знаков цена американского опциона колл в момент времени 0

$$c_0 = 1{,}898 \text{ руб.}$$

В примерах 1, 2 и 3 приведены результаты расчетов, проведенных с шагом по времени $\tau = 1$. Более точные результаты могут быть получены, если проводить расчеты с более мелкими шагами по времени τ. Эти результаты приведены в табл. 4.2.

Отметим два недостатка метода Блэка — Дермана — Тоя.

Первый недостаток состоит в том, что хотя набор кривых доходностей $y(0,T)$ и кривых волатильностей $\sigma_y(0,T)$, к которым применим метод Блэка — Дермана — Тоя, и является достаточно большим, существуют, как это отмечается авторами метода, такие пары кривых, к которым данный метод неприменим.

Таблица 4.2. *Цены опционов, рассчитанные с различными временными шагами τ*

τ	Европейский колл	Европейский пут	Американский колл
1	1,373	1,456	1,898
0,5	1,439	1,522	2,043
0,25	1,476	1,560	2,051
0,125	1,495	1,579	2,090
0,0625	1,505	1,588	2,096

Второй недостаток состоит в том, что все изменения в процентных ставках объясняются изменениями в краткосрочных ставках. Поэтому и портфель из облигаций, и отдельная облигация в одинаковой степени чувствительны к изменению процентных ставок. В действительности, диверсификация должна эту чувствительность уменьшать.

В методе Блэка — Дермана — Тоя краткосрочные ставки в каждый момент времени образуют геометрическую прогрессию. Существует подход, когда краткосрочные ставки в каждый момент времени образуют арифметическую прогрессию. Этот подход описан в разделах 6, 7.

5. Отсроченные соглашения о форвардных ставках и их оценка с использованием метода Блэка — Дермана — Тоя

Пусть $t < T_1 < T_2$. Рассмотрим соглашение о форвардной ставке, по которому участник рынка A в момент времени T_2 получает

$$(T_2 - T_1)\, N\, (r_s(T_1, T_2) - X)$$

руб. (Как обычно, если сумма платежа отрицательна, это означает, что участник A не получает, а платит эти деньги.) Здесь N — условная основная сумма соглашения о форвардной ставке, $r_s(T_1, T_2)$ — простая процентная ставка для заимствований в момент времени T_1 до момента времени T_2, X — оговоренная в договоре фиксированная ставка.

Мы знаем (см. раздел 1), что текущая стоимость в момент времени t такого соглашения о форвардной ставке равна

$$V_1(t) = N\,(T_2 - T_1)\, P(t, T_2)\, (f_s(t, T_1, T_2) - X).$$

Здесь $f_s(t, T_1, T_2)$ — просто начисляемая форвардная ставка.

В разделе 1 был рассмотрен финансовый инструмент, называемый отсроченным соглашением о форвардной ставке. Разница между отсроченным соглашением (для краткости в этом разделе мы будем называть соглашение о форвардной ставке просто соглашением) и обычным соглашением заключается только в моменте времени, когда производится платеж. Отсроченное соглашение о форвардной ставке заключается в том, что участник A получает ту же самую сумму, что и в предыдущем случае, но в момент времени T_1, а не в момент времени T_2.

Может возникнуть вопрос о правильности названия "отсроченное *соглашение*". Речь ведь идет не об отсроченном, а об опережающем платеже. Но можно смотреть на это, как на опережающий платеж, а можно — как на отсрочку в определении плавающей ставки. В основу названия положена вторая точка зрения.

Сравнивая два соглашения, отсроченное и обычное, и исходя из того, что отличаются они только сроком платежа, но не размером, можно предположить, что текущая стоимость в момент времени t отсроченного соглашения равна

$$V_2(t) = \frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} V_1(t),$$

т.е.

$$V_2(t) = N\,(T_2 - T_1)\,P(t,T_1)\,(f_s(t,T_1,T_2) - X). \qquad (5.1)$$

Скажем сразу, что величина $V_2(t)$, определенная формулой (5.1), не является текущей стоимостью в момент времени t отсроченного соглашения. Посмотрим, к какой ошибке приводит такой "наивный" подход к определению текущей стоимости отсроченного соглашения, как принятие в качестве этой текущей стоимости $V_2(t)$.

Составим в момент времени t портфель из одного длинного отсроченного соглашения и $\dfrac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}$ коротких обычных соглашений. Если текущая стоимость отсроченного соглашения определяется по формуле (5.1), то стоимость такого портфеля в момент времени t равна 0.

Пусть $t+\varepsilon < T_1$. Текущая стоимость обычного соглашения в момент времени $(t+\varepsilon)$ равна

$$V_1(t+\varepsilon) = N\,(T_2-T_1)\,P(t+\varepsilon,T_2)\,(f_s(t+\varepsilon,T_1,T_2)-X).$$

Если формула (5.1) дает текущую стоимость отсроченного соглашения, то эта текущая стоимость в момент времени $(t+\varepsilon)$ равна

$$V_2(t+\varepsilon) = N\,(T_2-T_1)\,P(t+\varepsilon,T_1)\,(f_s(t+\varepsilon,T_1,T_2)-X).$$

Тогда текущая стоимость рассматриваемого портфеля в момент времени $(t+\varepsilon)$ равна

$$V_2(t+\varepsilon) - \frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\,V_1(t+\varepsilon) =$$

$$= N\,(T_2-T_1)\,(f_s(t+\varepsilon,T_1,T_2)-X)\,\cdot$$

$$\cdot\left(P(t+\varepsilon,T_1) - \frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\,P(t+\varepsilon,T_2)\right) =$$

$$= N\,(T_2-T_1)\,(f_s(t+\varepsilon,T_1,T_2)-X)\,P(t+\varepsilon,T_2)\,\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{P(t+\varepsilon,T_1)}{P(t+\varepsilon,T_2)} - \frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\right) =$$

$$= N\,(T_2-T_1)^2\,P(t+\varepsilon,T_2)\,(f_s(t+\varepsilon,T_1,T_2)-X)\,\cdot$$

$$\cdot\,(f_s(t+\varepsilon,T_1,T_2) - f_s(t,T_1,T_2)).$$

Последний переход следует из равенства

$$\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} = 1 + (T_2-T_1)\,f_s(t,T_1,T_2).$$

Если считать, что $X = f_s(t, T_1, T_2)$ (а это так, если t — это момент заключения обычного соглашения), то в момент времени $(t+\varepsilon)$ текущая стоимость портфеля составляет

$$N\,(T_2 - T_1)^2\, P(t+\varepsilon, T_2)\,(f_s(t+\varepsilon, T_1, T_2) - X)^2.$$

Данная величина положительна как при увеличении, так и при уменьшении форвардной ставки $f_s(t+\varepsilon, T_1, T_2)$ по сравнению с форвардной ставкой $f_s(t, T_1, T_2)$. Стоимость портфеля в момент времени t была нулевой, а в момент времени $(t+\varepsilon)$ стала положительной во всех случаях, кроме случая, когда форвардная ставка не изменилась.

Это означает, что использовать формулу (5.1) для расчета текущей стоимости отсроченного соглашения нельзя.

Мы можем также высказать гипотезу, что текущая стоимость отсроченного соглашения в момент времени t должна быть больше величины $V_2(t)$, определенной формулой (5.1), и должна стремиться к $V_2(t)$ при стремлении к 0 волатильности форвардной ставки (точное определение волатильности форвардной ставки дано в разделе 8).

Для расчета текущей стоимости отсроченного соглашения может быть использован, в частности, подход Блэка — Дермана — Тоя.

Пример. Рассмотрим отсроченное соглашение о форвардной ставке с датой измерения плавающей ставки $T_1 = 4$ года (в данном случае это и дата выплаты) и с тенором 1 год (т.е. $T_2 = 5$ лет). Условная основная сумма $N = 1$ млн. руб. Фиксированная ставка X совпадает с $f_s(0, T_1, T_2)$ (поэтому при расчете текущей стоимости отсроченного соглашения по "наивной" формуле (5.1) текущая стоимость в момент времени 0 оказалась бы равной 0). Требуется найти текущую стоимость отсроченного соглашения в момент времени 0.

Пусть, как и в примере 1 из раздела 4, доходность (соответствующая начислению процентов один раз за период времени 1, т.е. один раз за год) имеет вид

$$y(0,T) = 0,1 + T/200,$$

волатильность доходности имеет вид

$$\sigma_y(0,T) = 0,2 - T/120.$$

Тогда $X = 0,145224$.

Опишем расчет с $\tau = 1$. Цены бескупонных облигаций с номиналом 1 руб. с погашением в момент времени $T_2 = 5$ для моментов времени $T_1 = 4$ и $T_2 = 5$ и для всех состояний экономики, соответствующих этим моментам времени, показаны ниже. В скобках показаны краткосрочные ставки $r_s(T_1,T_2)$ для различных состояний экономики в момент времени T_1. Эти же ставки приведены в примере 1 раздела 4; цены бескупонных облигаций без труда могут быть определены по краткосрочным ставкам.

$T_1 = 4$		$T_2 = 5$
		1,0
0,800260	(0,249594)	1,0
0,840941	(0,189144)	1,0
0,874635	(0,143334)	1,0
0,902023	(0,108620)	1,0
0,923947	(0,082313)	1,0

Цены отсроченного соглашения в момент времени $T_1 = 4$ для всех состояний экономики рассчитываются по формуле

$$V(j,T_1) = N\,(T_2 - T_1)\,(r_s(j,T_1,T_2) - X), \quad j = 0,1,\dots,T_1/\tau.$$

При $t < 4$ цена отсроченного соглашения рассчитывается по формуле (4.8):

$$V(j,t) = \frac{1}{1+\tau r(j,t)} \frac{1}{2} \left(V(j,t+\tau) + V(j+1,t+\tau)\right)$$

при $j = 0, 1, \ldots, t/\tau$. Результаты расчета показаны ниже.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & & 104370 \\
 & & & 61275 & 43920 \\
 & & 33914 & 18200 & -1890 \\
 & 15103 & 410 & -17279 & -36604 \\
915 & -13081 & -29045 & -45908 & -62912
\end{array}$$

Таким образом, цена отсроченного соглашения о форвардной ставке в момент времени 0 получилась равной 915 руб.

Более точные результаты могут быть получены, если проводить расчеты с более мелкими шагами по времени τ. Приведем эти результаты. Одновременно проверим, что при стремлении волатильности доходности к 0 цена отсроченного соглашения также стремится к 0. Для этого будем считать, что волатильность доходности имеет вид

$$\sigma_y(0,T) = \alpha\,(0,2 - T/120).$$

Ранее рассматривался случай $\alpha = 1$. В табл. 5.1 приведены цены в момент времени 0 отсроченного соглашения о форвардной ставке, полученные при расчетах с различными τ и α.

Таблица 5.1. *Цены отсроченного соглашения о форвардной ставке при различных волатильностях доходности $\sigma_y(0,T)$, рассчитанные с различными временными шагами τ*

τ	α		
	1	0,5	0,25
1	914,9	221,8	54,9
0,5	949,2	227,2	56,0
0,25	971,3	230,2	56,6
0,125	983,2	231,4	56,9
0,0625	990,0	231,9	57,1

6. Уравнение, связывающее цену деривативa с рыночной ценой риска. Стохастические модели с непрерывным временем для краткосрочных ставок и расчеты цен облигаций

Пусть скалярный случайный процесс $\eta(t)$ является стохастической моделью некоторой изменяющейся со временем величины. Эта величина может быть, например, ценой того или иного актива, но может быть и любым другим показателем, даже не имеющим прямого отношения к экономике. Предположим, что случайный процесс $\eta(t)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\eta = m(\eta, t)\, \eta\, dt + s(\eta, t)\, \eta\, dz_t,$$

где z_t — стандартное броуновское движение.

Пусть $f_1(\eta, t)$ и $f_2(\eta, t)$ — цены двух деривативов, связанных с величиной η. По формуле Ито случайные процессы f_1 и f_2 являются решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$df_i = \mu_i(\eta, t)\, f_i\, dt + \sigma_i(\eta, t)\, f_i\, dz_t \quad \text{при} \quad i = 1, 2. \qquad (6.1)$$

Точный вид коэффициентов μ_i и σ_i может быть выписан, мы это сделаем немного позже.

Зафиксируем некоторый момент времени t_0 и составим в этот момент времени портфель, состоящий из ζ_1 единиц первого деривантива и ζ_2 единиц второго деривантива. Стоимость этого портфеля обозначим через $\Pi(\eta, t)$. Если ζ_1 и ζ_2 остаются постоянными, то стоимость этого портфеля для всех последующих моментов времени определяется по формуле

$$\Pi(\eta, t) = \zeta_1 f_1(\eta, t) + \zeta_2 f_2(\eta, t),$$

и процесс Π является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\Pi = (\zeta_1 \, \mu_1 \, f_1 + \zeta_2 \, \mu_2 \, f_2)dt + (\zeta_1 \, \sigma_1 \, f_1 + \zeta_2 \, \sigma_2 \, f_2)dz_t.$$

Если взять $\zeta_1 = \sigma_2 f_2$ и $\zeta_2 = -\sigma_1 f_1$, то коэффициент при dz_t для момента времени t_0 зануляется, и портфель в этот момент времени является безрисковым. Тогда должно выполняться соотношение

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

где r — мгновенная краткосрочная ставка. Поэтому

$$\zeta_1 \, \mu_1 \, f_1 + \zeta_2 \, \mu_2 \, f_2 = r(\zeta_1 \, f_1 + \zeta_2 \, f_2).$$

Подставляя выражения для ζ_1 и ζ_2, получаем

$$\sigma_2 \, \mu_1 - \sigma_1 \, \mu_2 = r \, \sigma_2 - \sigma_1 \, r.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2},$$

и это означает, что данное отношение является одним и тем же для любого деривантива.

Опуская индекс, перепишем полученный результат так:

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda, \tag{6.2}$$

где λ, вообще говоря, зависит от η и t.

Это означает, что для любого деривативa, цена которого однозначно определяется величиной η и моментом времени t, должно выполняться соотношение (6.2), где величина $\lambda(\eta, t)$ является одной и той же для всех деривативов и называется *рыночной ценой риска* для η. Уравнение (6.2) можно переписать в виде

$$\mu - r = \lambda\, \sigma.$$

Если назвать σ риском, то последнее уравнение показывает, насколько ожидаемая доходность деривативa μ, связанного с величиной η, должна превышать безрисковую ставку r в зависимости от величины риска. Этим и объясняется то, что λ называют рыночной ценой риска.

Теперь приведем точную формулу для величин μ и σ из (6.1). По формуле Ито имеем

$$\mu = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + m\,\eta\,\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\,s^2\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right), \qquad \sigma = \frac{1}{f}\,s\,\eta\,\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Подставляя эти выражения в (6.2), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \eta\,\frac{\partial f}{\partial \eta}\,(m - \lambda\, s) + \frac{1}{2}\,s^2\eta^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = r\,f. \tag{6.3}$$

Уравнение (6.3) и есть уравнение, связывающее цену деривативa с рыночной ценой риска.

Данное уравнение для цены деривативa приведено в работе [65], где рассматривается случай, когда величиной η

является мгновенная краткосрочная ставка r, а деривативом — бескупонная облигация. Уравнение (6.3) названо в [65] *уравнением срочной структуры*. Мы также переходим к рассмотрению случая, когда величиной η является мгновенная краткосрочная ставка r.

Халл и Уайт в работе [39] предложили использовать для моделирования мгновенной краткосрочной ставки случайный процесс $r(t)$, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dr = (\theta(t) - a(t)\,r)\,dt + \sigma(t)\,r^{\beta}dz_t, \tag{6.4}$$

где $\beta = 0$ или $1/2$. При этом делается предположение, что рыночная цена риска является функцией $\lambda(t)$, ограниченной на любом интервале конечной длины $(0, T)$. Модель Халла и Уайта содержит в качестве частных случаев три использовавшиеся ранее модели для мгновенной краткосрочной ставки.

Во-первых, модель Васичека [65]:

$$dr = (\theta - a\,r)\,dt + \sigma\,dz_t.$$

Во-вторых, модель Кокса — Ингерсолла — Росса [23]:

$$dr = (\theta - a\,r)\,dt + \sigma\,r^{1/2}\,dz_t.$$

В обеих этих моделях θ, a и σ — константы.

В-третьих, модель Хо — Ли [38]:

$$dr = \theta(t)\,dt + \sigma\,dz_t.$$

Здесь σ также является константой.

Процесс, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения (6.4), обладает важным свойством, которое называется *возвращением к среднему.* Пусть $\theta(t)$ и $a(t)$ положительны. Тогда при малых r коэффициент перед dt положителен, и мгновенная краткосрочная ставка r имеет тенденцию к возрастанию. При больших r коэффициент перед dt отрицателен и r имеет тенденцию к уменьшению. Это в известной мере передает поведение реальной процентной ставки.

Дальнейшее изложение в этом разделе основано на работах [65], [39], [41].

Мы ограничимся рассмотрением случая $\beta = 0$. Тогда стохастическое дифференциальное уравнение (6.4) может быть записано в виде

$$dr = \frac{\theta(t) - a(t)\,r}{r}\,r\,dt + \frac{\sigma(t)}{r}\,r\,dz_t.$$

В этом случае уравнение с частными производными (6.3) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r\,\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\theta(t) - a(t)\,r}{r} - \frac{\lambda(t)\,\sigma(t)}{r}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2(t)}{r^2}r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = r\,f.$$

До сих пор не был конкретизирован вид функции $\theta(t)$ в уравнении (6.4). Мы будем считать, что эта функция связана с рыночной ценой риска $\lambda(t)$ соотношением

$$\theta(t) = \varphi(t) + \lambda(t)\,\sigma(t), \tag{6.5}$$

где функция $\varphi(t)$ строится по дисконтной функции $P(0,t)$, $a(t)$ и $\sigma(t)$ описанным ниже способом. (Нами приведено построение функции $\varphi(t)$ для случая, когда $a(t)$ и $\sigma(t)$ являются константами. Рассмотрение более общего случая можно найти, например, в книге [58].)

Тогда последнее уравнение с частными производными принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\varphi(t) - a(t)\, r)\, \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}\, \sigma^2(t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = r\, f.$$

Отметим, что в коэффициенты данного уравнения входит функция $\varphi(t)$, но не входят ни $\lambda(t)$, ни $\theta(t)$.

Полученное уравнение с частными производными верно для цены $f(r,t)$ любого финансового инструмента, связанного с краткосрочной ставкой r. Если сделать предположение, что цена бескупонной облигации с погашением в некоторый произвольный, но фиксированный момент времени T определяется краткосрочной ставкой r, то это же уравнение будет верно и для цены бескупонной облигации $P(r,t,T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\varphi(t) - a(t)\, r)\, \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\, \sigma^2(t)\, \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = r\, P. \tag{6.6}$$

Здесь $t \leqslant T$. Граничным условием для функции $P(r,t,T)$ будет

$$P(r,T,T) = 1 \tag{6.7}$$

для любого r.

Решение уравнения (6.6) будем искать в виде

$$P(r,t,T) = A(t,T)\, e^{-B(t,T)\, r}. \tag{6.8}$$

Заметим, что для функции вида (6.8)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial t}\, e^{-B\,r} - A\, r\, \frac{\partial B}{\partial t}\, e^{-B\,r} = \\
&= P\, \left(\frac{1}{A}\, \frac{\partial A}{\partial t} - r\, \frac{\partial B}{\partial t}\right); \\
\frac{\partial P}{\partial r} &= -A\, B\, e^{-B\,r} = -B\, P; \\
\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= B^2\, P.
\end{aligned} \qquad (6.9)$$

Подставим выражения для производных из (6.9) в (6.6):

$$-r\, \frac{\partial B}{\partial t} + r\, a(t)\, B + \frac{1}{A}\, \frac{\partial A}{\partial t} - \varphi(t)\, B + \frac{1}{2}\, \sigma^2(t)\, B^2 = r.$$

Это уравнение обратится в верное тождество, если, как функции от t, A и B являются решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial B}{\partial t} - a(t)\, B + 1 = 0, \qquad (6.10)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \varphi(t)\, A\, B + \frac{1}{2}\, \sigma^2(t)\, A\, B^2 = 0. \qquad (6.11)$$

Выполнение граничного условия (6.7) гарантируют условия

$$A(T,T) = 1, \qquad B(T,T) = 0. \qquad (6.12)$$

Таким образом, если мы сможем решить сначала уравнение (6.10), а потом, при найденной функции B, — уравнение (6.11), то соответствующая функция $P(r,t,T)$, определенная по формуле (6.8), будет решением уравнения (6.6).

Известно, что для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$z' + f(t)\, z = g(t)$$

интегральная кривая, проходящая через точку (τ, ζ), определяется уравнением

$$z(t) = e^{-F(t)} \left(\zeta + \int_{\tau}^{t} g(u)\, e^{F(u)}\, du \right), \tag{6.13}$$

где

$$F(t) = \int_{\tau}^{t} f(u)\, du.$$

Начиная с этого места, будем считать функцию $a(t)$ константой a. Тогда в соответствии с (6.13) решение уравнения (6.10), удовлетворяющее граничному условию (6.12), имеет вид

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \tag{6.14}$$

Ниже мы покажем, что если функция $\sigma(t)$ равна постоянной σ, то функция $A(t,T)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \ln A(t,T) \ &= \ln \frac{A(0,T)}{A(0,t)} - B(t,T)\, \frac{\partial \ln A(0,t)}{\partial t} - \\ &- \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-aT} - e^{-at}\right)^2 \left(e^{2at} - 1\right). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Цены бескупонных облигаций $P(0,T)$ (т.е. цены в момент времени 0) известны для всех $T \geqslant 0$. Величины $B(0,T)$

известны из (6.14). Мгновенная краткосрочная ставка r в момент времени 0 известна. Из формулы

$$P(0,T) = A(0,T)\, e^{-B(0,T)\, r},$$

являющейся частным случаем формулы (6.8) при $t = 0$, оказываются известными величины $A(0,T)$ для всех T. Поэтому формула (6.15) однозначно определяет функцию $A(t,T)$ по срочной структуре процентной ставки в момент времени 0.

Введем обозначение $h(T) = \ln A(0,T)$.

Заметим, что (6.11) — это не одно уравнение. Это семейство обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку $A = A(t,T)$, $B = B(t,T)$. Каждому значению параметра T отвечает свое уравнение. Независимой переменной в каждом из уравнений является t.

Зафиксируем какое-нибудь $T > 0$ и рассмотрим соответствующее уравнение (6.11). Его решение, $A(t,T)$, как функция от t, должно удовлетворять двум граничным условиям:

$$A(0,T) = \exp(h(T)), \qquad A(T,T) = 1.$$

Но решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка однозначно определяется одним граничным условием подобного вида. А нам нужно, чтобы выполнялись сразу два граничных условия, да еще и при всех T. Оказывается, этого можно добиться, но для этого функция $\varphi(t)$, входящая в уравнения (6.11), должна быть выбрана строго определенным образом.

Применение формулы (6.13) к уравнению (6.11) в сочетании с граничным условием $A(T,T) = 1$ дает

$$\ln A(t,T) = -\int_t^T \left[\varphi(u)\ B(u,T) - 0,5\ \sigma^2\ B^2(u,T)\right] du. \quad (6.16)$$

Функцию $\varphi(t)$ мы определим из уравнения

$$h(T) = -\int_0^T \varphi(u)\ B(u,T)\ du + \int_0^T 0,5\ \sigma^2(u)\ B^2(u,T)\ du.$$

Введем обозначение

$$J(T) = h(T) - \int_0^T 0,5\ \sigma^2(u)\ B^2(u,T)\ du.$$

Если функция $\sigma(u)$ известна, то функция $J(T)$ также известна, поскольку известна функция $h(T)$. Имеем

$$J(T) = -\int_0^T \varphi(u)\ B(u,T)\ du.$$

С учетом условия $B(T,T) = 0$, получаем

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T} = -\int_0^T \varphi(u)\ \frac{\partial B(u,T)}{\partial T}\ du.$$

Из (6.14) получаем

$$\frac{\partial B(u,T)}{\partial T} = e^{-aT}\ e^{au}. \quad (6.17)$$

Поэтому

$$e^{aT}\,\frac{\partial J(T)}{\partial T} = -\int_0^T \varphi(u)\,e^{au}\,du.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(e^{aT}\,\frac{\partial J(T)}{\partial T}\right) = -\varphi(T)\,e^{aT}$$

и

$$-\varphi(T) = a\,\frac{\partial J(T)}{\partial T} + \frac{\partial^2 J(T)}{\partial T^2}. \tag{6.18}$$

Преобразуем это уравнение. Имеем с учетом (6.17)

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T} = \frac{\partial h(T)}{\partial T} - \int_0^T 0{,}5\,\sigma^2(u)\,\frac{\partial}{\partial T}\left(B^2(u,T)\right)\,du =$$

$$= \frac{\partial h(T)}{\partial T} - e^{-aT}\int_0^T \sigma^2(u)\,B(u,T)\,e^{au}\,du;$$

$$\frac{\partial^2 J(T)}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 h(T)}{\partial T^2} + a\,e^{-aT}\int_0^T \sigma^2(u)\,e^{au}\,B(u,T)\,du -$$

$$-e^{-aT}\int_0^T \sigma^2(u)\,e^{au}\,\frac{\partial}{\partial T}\,B(u,T)\,du.$$

С учетом (6.14) имеем

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T} = \frac{\partial h(T)}{\partial T} - \frac{1}{a}\int_0^T \sigma^2(u)\,\left(e^{-a(T-u)} - e^{-2a(T-u)}\right)\,du.$$

С учетом (6.14) и (6.17) имеем

$$\frac{\partial^2 J(T)}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 h(T)}{\partial T^2} + \int\limits_0^T \sigma^2(u)\, e^{-a(T-u)} \left(1 - e^{-a(T-u)}\right) du-$$

$$- \int\limits_0^T \sigma^2(u)\, e^{-a(T-u)} e^{-a(T-u)}\, du.$$

Начиная с этого места будем считать функцию $\sigma(u)$ константой σ. Из (6.18) имеем

$$-\varphi(T) = a\,\frac{\partial h(T)}{\partial T} + \frac{\partial^2 h(T)}{\partial T^2} - \sigma^2\,\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}.$$

Подставим найденное выражение для $\varphi(T)$ в формулу (6.16). Имеем

$$\ln A(t,T) = \int\limits_t^T \left(a\,\frac{\partial h(u)}{\partial u} + \frac{\partial^2 h(u)}{\partial u^2}\right) B(u,T)\, du +$$

$$+ \int\limits_t^T \left(-\sigma^2\,\frac{1 - e^{-2aT}}{2a} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\, B(u,T)\right) B(u,T)\, du =$$

$$= I_1 + I_2,$$

где через I_1 обозначен первый интеграл, а через I_2 — второй. Используя (6.14), получаем

$$I_1 = \int_t^T \frac{\partial h}{\partial u} \left(1 - e^{-a(T-u)}\right) du + \frac{1}{a} \int_t^T \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \left(1 - e^{-a(T-u)}\right) du =$$

$$= h(T) - h(t) - e^{-aT} \int_t^T \frac{\partial h}{\partial u} e^{au} \, du +$$

$$+ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial h}{\partial t}(T) - \frac{\partial h}{\partial t}(t)\right) - \frac{1}{a} e^{-aT} \int_t^T \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} e^{au} \, du =$$

$$= h(T) - h(t) + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial h}{\partial t}(T) - \frac{\partial h}{\partial t}(t)\right) -$$

$$- \frac{1}{a} e^{-aT} \int_t^T \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial h}{\partial u} e^{au}\right) du =$$

$$= h(T) - h(t) - \frac{\partial h}{\partial t}(t) \, B(t,T).$$

Далее с учетом (6.14)

$$I_2 = -\frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T \left(1 - e^{-2au} - 1 + e^{-a(T-u)}\right) \left(1 - e^{-a(T-u)}\right) du =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-aT} - e^{-at}\right)^2 \left(e^{2at} - 1\right).$$

Формула (6.15) выведена.

Обратимся к вопросу оценки европейских опционов колл и пут на бескупонные облигации. Если поведение мгновенной краткосрочной ставки $r(t)$ описывается уравнением

$$dr = (\theta(t) - a\,r)\,dt + \sigma\,dz_t,$$

являющимся частным случаем уравнения (6.4), в котором a и σ — константы, а $\beta = 0$, то существуют аналитические формулы для цен этих опционов. С использованием формулы Ито из последнего уравнения получаем, что случайный процесс $P(r, t, T)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dP = \mu P\,dt + \sigma\,\frac{\partial P}{\partial r}\,dz_t.$$

Из (6.9)

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -B\,P.$$

Поэтому

$$dP = \mu P\,dt - \sigma\,B\,P\,dz_t. \tag{6.19}$$

Право продать в момент времени T за X бескупонную облигацию с погашением в момент времени T^*, где $T < T^*$, — это право обменять данную облигацию на X бескупонных облигаций с погашением в момент времени T при условии, что обмен производится в тот же самый момент времени T (речь идет о бескупонных облигациях с номиналом 1 руб.) А цена такого права обменять один актив на другой, если цены обоих активов моделируются случайными процессами, являющимися решениями стохастических дифференциальных уравнений вида (6.19), была рассчитана ранее, в разделе 2.

Эта цена может быть найдена по формуле (2.6). В данном случае

$$\nu_1(t) = -\sigma\, B(t,T), \qquad \nu_2(t) = -\sigma\, B(t,T^*).$$

Поэтому цена рассматриваемого европейского опциона пут в момент времени 0

$$p_0 = X\, P(0,T)\, N(d) - P(0,T^*)\, N(d-\rho), \tag{6.20}$$

где

$$d = \frac{1}{\rho}\ \ln \frac{X\, P(0,T)}{P(0,T^*)} \ + \ \frac{\rho}{2},$$

$$\rho^2 = \int_0^T (-\sigma\, B(t,T) + \sigma\, B(t,T^*))^2\, dt.$$

С учетом (6.14)

$$\rho = \frac{\sigma}{a}\ \left(1 - e^{-a\tau}\right) \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}},$$

где $\tau = T^* - T$.

Аналогично может быть найдена цена в момент времени 0 европейского опциона колл

$$c_0 = P(0,T^*)\, N(-d+\rho) - X\, P(0,T)\, N(-d). \tag{6.21}$$

7. Оценка деривативов с использованием стохастической модели для краткосрочных ставок (метод Халла — Уайта)

Основная часть в методе Халла — Уайта, как и в методе Блэка — Дермана — Тоя, описанном в разделе 4, — это построение дискретной стохастической модели для краткосрочных ставок. Сходны и основные идеи этих моделей: в методе Блэка — Дермана — Тоя предполагается, что краткосрочные ставки в каждый момент времени образуют геометрическую прогрессию, в методе Халла — Уайта предполагается, что краткосрочныее ставки в каждый момент времени образуют арифметическую прогрессию. Но оказывается, что сходные идеи приводят к двум не очень похожим друг на друга методам расчета. Метод Халла — Уайта предложен в работах [40], [42].

Пусть математическая модель для мгновенных краткосрочных ставок — это случайный процесс $r(t)$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dr = (\theta(t) - a\, r)\, dt + \sigma\, dz_t,$$

которое является частным случаем уравнения (6.4), когда a и σ являются константами, а $\beta = 0$. Считаем $a > 0$ и $\sigma > 0$.

Для перехода от непрерывного случайного процесса $r(t)$ к дискретному случайному процессу в рассмотрение вводятся три параметра τ, h и J. Временной шаг $\tau > 0$ может быть выбран произвольно с единственным ограничением, что рассматриваемые в задаче промежутки времени, например от текущего момента времени 0 до даты истечения опциона, должны быть кратны τ. В выборе h также имеется некоторый произвол, но, на самом деле, значительно меньший, чем произвол в выборе τ. Следуя оригинальной работе Халла и Уайта, будем считать

$$h = \sigma\,\sqrt{3\tau}. \tag{7.1}$$

В качестве J берется минимальное целое число, не меньшее $(0,1836/a\tau)$. О причинах такого выбора чисел h и J будет сказано ниже. При целом $n \geqslant 0$ положим $J_n = \min(n, J)$. Считается, что в момент времени $n\tau$ экономика может находиться в одном из $(2J_n + 1)$ состояний, которые мы будем помечать индексом j, принимающим значения $-J_n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, J_n$ (см. рис. 7.1).

Из любого состояния j в момент времени $n\tau$ экономика к моменту времени $(n+1)\tau$ может перейти в одно из трех состояний. Если $-J < j < J$, то в момент времени $(n+1)\tau$ экономика может находиться в одном из состояний $(j-1)$, j или $(j+1)$. Если $j = -J$, то в момент времени $(n+1)\tau$ экономика может находиться в одном из состояний j, $(j+1)$ или $(j+2)$. Если $j = J$, то в момент времени $(n+1)\tau$ экономика может находиться в одном из состояний $(j-2)$, $(j-1)$ или j. В любом случае вероятности перехода в каждое из этих состояний обозначим p_d, p_m, p_u. Эти вероятности будут выбраны зависящими от j, но не зависящими от n.

Будем считать, что в момент времени $n\tau$ при состоянии экономики j непрерывно начисляемая ставка для заимствований на срок τ есть

$$\alpha_n + j\,h,$$

где $n \geqslant 0$; $j = -J_n, \dots, -1, 0, 1, \dots, J_n$. Это означает, что в каждый момент времени данные ставки образуют арифметическую прогрессию. Числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ подлежат определению. Для расчета этих чисел необходимо знать вероятности p_d, p_m, p_u для всех j.

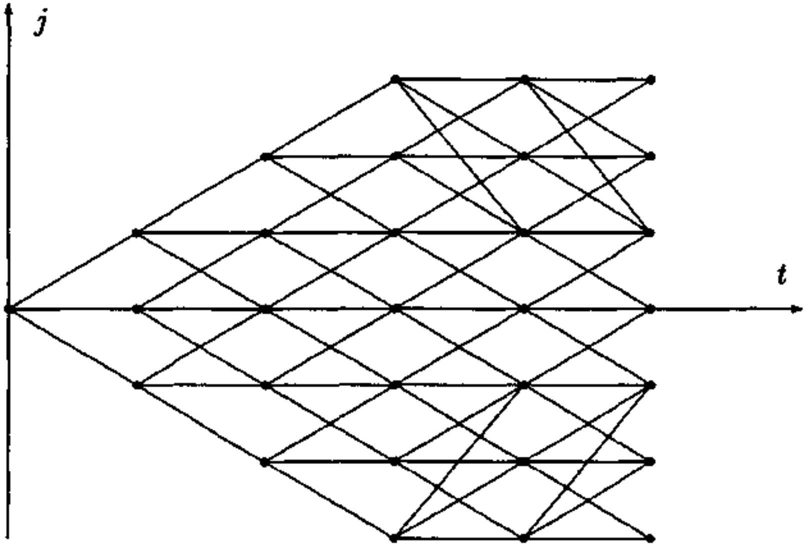

Рис. 7.1. *Триномиальное дерево в методе Халла — Уайта*

Для расчета вероятностей p_d, p_m, p_u рассматривается вспомогательный случайный процесс $r^*(t)$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dr^* = -a\,r^*\,dt + \sigma\,dz.$$

Если пренебречь членами более высокого порядка малости, чем τ, то математическое ожидание случайной величины $(r^*(t+\tau) - r^*(t))$ при фиксированном t равно $-a\,r^*(t)\,\tau$, а дисперсия этой случайной величины равна $\sigma^2\tau$.

Считаем, что в любой момент времени $n\tau$ при состоянии экономики j "ставка" $r^* = jh$. Здесь $j = -J_n, \dots, -1, 0, 1, \dots, J_n$; $n \geqslant 0$.

Зафиксировав j, выберем вероятности p_d, p_m, p_u так, чтобы математическое ожидание и дисперсия случайной величины $(r^*(n\tau+\tau) - r^*(n\tau))$ были равны соответственно $-ajh\tau$ и $\sigma^2\tau$. При $-J < j < J$ это приводит нас к системе уравнений

$$\begin{aligned} &p_u\,h - p_d\,h = -ajh\tau,\\ &p_u\,h^2 + p_d\,h^2 = \sigma^2\,\tau + a^2j^2h^2\tau^2,\\ &p_u + p_m + p_d = 1; \end{aligned} \tag{7.2}$$

при $j = -J$ — к системе уравнений

$$\begin{aligned} &p_u\,2h + p_m\,h = -ajh\tau,\\ &p_u\,4h^2 + p_m\,h^2 = \sigma^2\,\tau + a^2j^2h^2\tau^2,\\ &p_u + p_m + p_d = 1; \end{aligned} \tag{7.3}$$

при $j = J$ — к системе уравнений

$$\begin{aligned} &-p_d\,2h - p_m\,h = -ajh\tau,\\ &p_d\,4h^2 + p_m\,h^2 = \sigma^2\,\tau + a^2j^2h^2\tau^2,\\ &p_u + p_m + p_d = 1. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Определение h по формуле (7.1) и определение J как минимального целого числа, не меньшего $(0,1836/a\tau)$, позволяют, как это сейчас будет показано, добиться того, чтобы все вероятности, найденные из этих систем уравнений, были положительны. Введем обозначение $x = aj\tau$.

Тогда из системы уравнений (7.2) следует, что при $-J < j < J$

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x^2 - x),$$

$$p_m = \frac{2}{3} - x^2,$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x^2 + x).$$

Вероятности p_u и p_d положительны при любом x. Вероятность p_m положительна при $x^2 < 2/3$ или, приближенно, при $|x| \leqslant 0,8164$.

Из системы уравнений (7.3) следует, что при $j = -J$

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x^2 + x),$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - x^2 - 2x,$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(x^2 + 3x).$$

Вероятности p_u и p_d положительны при любом x, а условие $p_m > 0$ приводит к ограничению

$$-1,8164 \leqslant x \leqslant -0,1836.$$

При выборе J мы и добивались, чтобы выполнялось последнее из неравенств: если $J \geqslant (0,1836/a\tau)$, то $x = -aJ\tau \leqslant -0,1836$.

Из системы уравнений (7.4) следует, что при $j = J$

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}\,(x^2 - 3x),$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - x^2 + 2x,$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\,(x^2 - x).$$

Вероятности p_u и p_d положительны при любом x, а условие $p_m > 0$ приводит к ограничению

$$0,1836 \leqslant x \leqslant 1,8164,$$

которое выполняется за счет выбора J.

Итак, вероятности p_d, p_m, p_u определены для всех j.

Для определения чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ кроме вероятностей p_d, p_m, p_u, рассчитанных для всех j, используются еще цены бескупонных облигаций $P(0,T)$ при $T = \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ В частности, из формулы

$$P(0,\tau) = e^{-\alpha_0 \tau}$$

сразу определяется α_0.

Как и в подходе Блэка — Дермана — Тоя, в подходе Халла — Уайта применяется индукция вперед. Напомним, что $G(j,T)$ — это цена в момент времени 0 актива, по которому в момент времени T выплачивается 1 руб., но только если в момент времени T экономика находится в состоянии j. Будем исходить из соотношений $G(0,0)=1$ и при $n \geqslant 1$

$$G(j,n\tau)=\sum_{k} G(k,(n-1)\tau)\, q(k,j)\, e^{-(\alpha_{n-1}+kh)\tau},$$

где $q(k,j)$ — вероятность перехода из состояния $(k,(n-1)\tau)$ в состояние $(j,n\tau)$. Суммирование производится по всем k, для которых эта вероятность ненулевая.

В частности, по этой формуле могут быть найдены $G(j,\tau)$ при $j=-1,0,1$.

Покажем, как после определения величин $G(j,n\tau)$ для всех возможных в момент времени $n\tau$ состояний экономики j может быть найдено значение α_n. Для этого используется соотношение

$$P(0,(n+1)\tau)=\sum_{j=-J_n}^{J_n} G(j,n\tau)\, e^{-(\alpha_n+jh)\tau},$$

из которого следует, что

$$\alpha_n=\frac{1}{\tau}\left(\ln\sum_{j=-J_n}^{J_n} G(j,n\tau)\, e^{-jh\tau}-\ln P(0,(n+1)\tau)\right).$$

Теперь могут быть найдены величины $G(j,(n+1)\tau)$, затем α_{n+1} и т.д.

Индукция вперед в методе Халла — Уайта оказывается даже проще, чем в методе Блэка — Дермана — Тоя: уравнение для α_n разрешается в явном виде и нет необходимости использовать итерационный процесс.

Для того, чтобы в различные моменты времени и при различных состояниях экономики рассчитывать цены бескупонных облигаций с различными сроками погашения, следует использовать формулу (6.8). Функция $B(t,T)$ определяется по формуле (6.14), а функция $A(t,T)$ — по формуле (6.15). Однако здесь есть одна тонкость. В формуле (6.8) r — это мгновенная непрерывно начисляемая ставка, а рассчитанные величины $(\alpha_n + jh)$ — это непрерывно начисляемые ставки для заимствований на срок τ. Сохраним для мгновенной ставки обозначение r, а непрерывно начисляемую ставку для заимствований на срок τ обозначим через R. Тогда, с одной стороны, по формуле (6.8)

$$P(t,t+\tau) = A(t,t+\tau)\,e^{-B(t,t+\tau)\,r},$$

а с другой стороны,

$$P(t,t+\tau) = e^{-R\,\tau}.$$

Отсюда

$$r = \frac{R\tau + \ln A(t,t+\tau)}{B(t,t+\tau)}.$$

Использование в формуле (6.8) ставки R вместо r может привести к заметным ошибкам даже при достаточно малых τ (см. [44, с. 447]).

Для определения цен опционов может быть использована обычная индукция назад. Но в данном случае синтетический опцион следует строить не из двух, а из трех различных активов, что связано с использованием триномиальной, а не биномиальной решетки.

Интересный (и пригодный для тестирования компьютерной программы) пример оценки европейского опциона пут на бескупонную облигацию методом Халла — Уайта с использованием реальной дисконтной функции по немецкой марке описан в [44, с. 446].

8. Оценка деривативов с использованием стохастической модели для форвардных ставок (метод Хита — Джерроу — Мортона)

В отличие от своих предшественников Хит, Джерроу и Мортон в работах [35 — 37] построили метод оценки, исходя не из стохастической модели для краткосрочной процентной ставки, а из стохастической модели для форвардных ставок.

В этом методе сначала строится стохастическая модель с непрерывным временем для форвардных ставок, а затем стандартным путем производится переход к стохастической модели с дискретным временем. Основная математическая трудность в построении метода Хита — Джерроу — Мортона — это переход от стохастической модели с дискретным временем для форвардных ставок к стохастической модели с дискретным временем для цен бескупонных облигаций. После того, как стохастическая модель для цен бескупонных облигаций построена, оценка деривативов производится обычным способом индукцией назад.

Напомним, что непрерывно начисляемая форвардная ставка $f(t,T,T+\tau)$ определяется из соотношения

$$\exp(\tau\, f(t,T,T+\tau)) = \frac{P(t,T)}{P(t,T+\tau)}.$$

Здесь $0 \leqslant t \leqslant T$. Значение $\tau > 0$ считается выбранным. Будем считать, что при произвольном, но фиксированном

$T > 0$ математической моделью для форвардной ставки является случайный процесс, представляющий собой решение стохастического дифференциального уравнения

$$df = \mu_f(t,T)\,dt + \sigma_f(t,T)dz_t, \tag{8.1}$$

где z_t — стандартное броуновское движение. Величина σ_f называется *волатильностью форвардной ставки.*

Введем обозначение

$$F(t,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,T+\tau)}.$$

Тогда

$$d\ln F(t,T) = \mu(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dz_t,$$

где $\mu = \tau\,\mu_f$, $\sigma = \tau\,\sigma_f$.

Из последнего уравнения следует, что математическое ожидание случайной величины

$$\ln F(t+\tau,T) - \ln F(t,T)$$

приближенно может быть принято равным

$$\mu(t,T)\,\tau, \tag{8.2}$$

а дисперсия этой случайной величины приближенно может быть принята равной

$$\sigma^2(t,T)\,\tau. \tag{8.3}$$

Рассматривается дискретно работающая экономика; переменная t может принимать значения $0, \tau, 2\tau, \ldots, n\tau, \ldots$ В момент времени $n\tau$ экономика может находиться в одном из 2^n состояний.

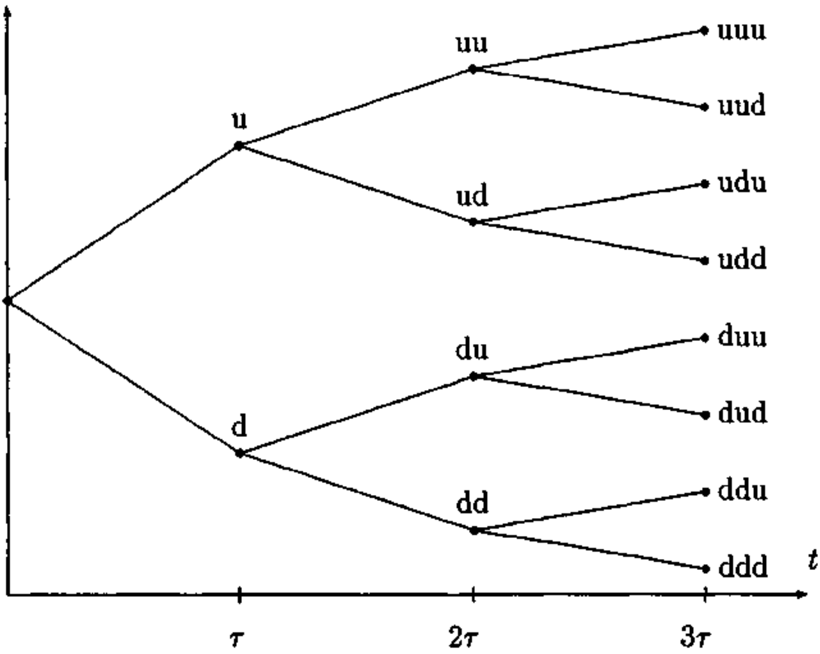

Рис. 8.1. *Биномиальное дерево в методе Хита — Джерроу — Мортона*

Состояние экономики, возможное в момент времени $n\tau$, будем обозначать через s_t, считая, что s_t — это набор из n символов u и d. Например, при $t = \tau$ возможны два состояния экономики, $s_\tau = u$ и $s_\tau = d$. При $t = 2\tau$ возможны четыре состояния экономики, $s_{2\tau} = uu$, $s_{2\tau} = ud$, $s_{2\tau} = du$, $s_{2\tau} = dd$. Если в момент времени t экономика находится в состоянии s_t, то к моменту времени $(t+\tau)$ экономика может перейти в одно из двух состояний $s_{t+\tau} = s_t u$ или $s_{t+\tau} = s_t d$.

Возможные состояния экономики для первых трех моментов времени показаны на рис. 8.1.

Обозначения u и d происходят от английских слов "up" и "down". В предыдущих разделах при описании методов Блэка — Дермана — Тоя и Халла — Уайта мы просто нумеровали все состояния экономики, возможные в тот или иной момент времени, и, на первый взгляд, это кажется удобнее, чем обозначать состояние экономики строкой из символов u и d. Причина, почему в методе Хита — Джерроу — Мортона принят именно такой способ обозначения состояний экономики, станет понятна после того, как будет выписана стохастическая модель для цен бескупонных облигаций (формула (8.6)).

Обозначим через $F(t,T;s_t)$ величину $F(t,T)$ при состоянии экономики s_t. Тогда

$$\ln F(t+\tau,T;s_{t+\tau}) - \ln F(t,T;s_t)$$

— это случайная величина, которая может принимать два значения, одно при $s_{t+\tau} = s_t u$ и другое при $s_{t+\tau} = s_t d$. Требуется, чтобы математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины были равны соответственно (8.2) и (8.3).

Потребуем, чтобы из состояния s_t экономика с равной вероятностью могла перейти в состояние $s_t u$ или в состояние $s_t d$, т.е. вероятности обоих переходов равны 0,5. Положим

$$\ln F(t+\tau,T;s_{t+\tau}) - \ln F(t,T;s_t) =$$

$$= \begin{cases} \mu(t,T;s_t)\,\tau - \sigma(t,T;s_t)\,\sqrt{\tau} & \text{при} \quad s_{t+\tau} = s_t u \\ \mu(t,T;s_t)\,\tau + \sigma(t,T;s_t)\,\sqrt{\tau} & \text{при} \quad s_{t+\tau} = s_t d. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины равны соответственно (8.2) и (8.3)[6].

То же самое определение можно записать в другом виде

$$F(t+\tau, T; s_{t+\tau}) =$$

$$= \begin{cases} F(t,T;s_t)\,\alpha(t,T;s_t) & \text{при} \quad s_{t+\tau} = s_t u \\ F(t,T;s_t)\,\beta(t,T;s_t) & \text{при} \quad s_{t+\tau} = s_t d, \end{cases} \tag{8.4}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(t,T;s_t) &= \exp[\, \mu(t,T;s_t)\,\tau - \sigma(t,T;s_t)\,\sqrt{\tau}\,], \\ \beta(t,T;s_t) &= \exp[\, \mu(t,T;s_t)\,\tau + \sigma(t,T;s_t)\,\sqrt{\tau}\,]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Нашей целью является построить по процессу (8.4) процесс для цен бескупонных облигаций. Запишем его в виде

$$P(t+\tau, T; s_{t+\tau}) =$$

$$= \begin{cases} P(t,T;s_t)\,u(t,T;s_t) & \text{при} \quad s_{t+\tau} = s_t u \\ P(t,T;s_t)\,d(t,T;s_t) & \text{при} \quad s_{t+\tau} = s_t d. \end{cases} \tag{8.6}$$

Построить процесс — значит опрѐделить все значения $u(t,T;s_t)$ и $d(t,T;s_t)$. Значения функций α и β известны для всех узлов. Они строятся по значениям функций μ и σ, которые являются известными. Через значения этих функций должны быть найдены величины u и d для всех узлов.

Цены бескупонных облигаций $P(0,T)$ считаются известными для всех сроков погашения[7]. Поэтому, если процесс (8.6) известен, то можно определить цены бескупонных

[6]В уравнении (8.1) коэффициенты μ_f и σ_f считались зависящими только от t и T, но не от состояния экономики в момент времени t. Здесь мы перешли к рассмотрению более общего случая.

[7]Естественно, рассматривается конечный набор сроков погашения T, например не больше 30 лет.

облигаций для всех моментов времени t, для всех возможных в эти моменты времени состояний экономики s_t и для всех $T > t$. По ценам бескупонных облигаций могут быть рассчитаны цены различных деривативов для момента времени 0.

Очевидно, что

$$u(t, t+\tau; s_t) = d(t, t+\tau; s_t),$$

поскольку при любом состоянии экономики $P(t+\tau, t+\tau; s_{t+\tau}) = 1$. При $t < T - \tau$ считаем, что

$$d(t, T; s_t) < u(t, T; s_t)$$

при любом s_t.

Положим

$$R(t; s_t) = F(t, t; s_t).$$

Очевидно, что

$$R(t; s_t) = u(t, t+\tau; s_t) = d(t, t+\tau; s_t).$$

Рассмотрим также счет денежного рынка. Положим

$$B(0) = 1$$

и

$$B(t+\tau; s_t) = B(t; s_{t-\tau})\, R(t; s_t).$$

Важно то, что состояние счета денежного рынка в момент времени $(t+\tau)$ определяется состоянием экономики s_t в момент времени t и не зависит от того, чему равно $s_{t+\tau}$, $s_t u$ или $s_t d$.

Утверждение. При $t < T$

$$\alpha(t, T; s_t) = \frac{u(t, T; s_t)}{u(t, T + \tau; s_t)}.$$

Доказательство.

$$F(t + \tau, T; s_t u) = \frac{P(t + \tau, T; s_t u)}{P(t + \tau, T + \tau; s_t u)} =$$

$$= \frac{P(t, T; s_t)}{P(t, T + \tau; s_t)} \frac{u(t, T; s_t)}{u(t, T + \tau; s_t)} =$$

$$= F(t, T; s_t) \frac{u(t, T; s_t)}{u(t, T + \tau; s_t)}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение. При $t < T$

$$\beta(t, T; s_t) = \frac{d(t, T; s_t)}{d(t, T + \tau; s_t)}.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Утверждение. При $k \geqslant 2$

$$u(t, t + k\tau; s_t) = \frac{R(t; s_t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-1} \alpha(t, t + j\tau; s_t)}. \tag{8.7}$$

Доказательство проведем по индукции. При $k = 2$ в силу доказанного выше утверждения имеем

$$u(t, t + 2\tau; s_t) = \frac{u(t, t + \tau; s_t)}{\alpha(t, t + \tau; s_t)} = \frac{R(t; s_t)}{\alpha(t, t + \tau; s_t)}.$$

При произвольном k в силу того же утверждения и предположения индукции

$$u(t, t + k\tau; s_t) = \frac{u(t, t + (k-1)\tau; s_t)}{\alpha(t, t + (k-1)\tau; s_t)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha(t, t + (k-1)\tau; s_t)} \frac{R(t; s_t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-2} \alpha(t, t + j\tau; s_t)} = \frac{R(t; s_t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-1} \alpha(t, t + j\tau; s_t)}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение. При $k \geqslant 2$

$$d(t, t + k\tau; s_t) = \frac{R(t; s_t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-1} \beta(t, t + j\tau; s_t)}. \tag{8.8}$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Значения функций α и β известны для всех узлов. Они строятся по значениям функций μ и σ, которые являются внешними, или, как иногда говорят, экзогенными переменными. Через них должны быть найдены величины u и d для всех узлов.

При построении α и β по μ и σ мы приняли, что вероятность перехода в состояние $s_t u$ из состояния s_t равна 0,5, и вероятность перехода в состояние $s_t d$ из состояния s_t также равна 0,5. Мы откажемся временно от этого ограничения и будем считать эти две вероятности зависящими от узла (сумма двух вероятностей для каждого узла, конечно, равна 1) и неизвестными. Нашей ближайшей целью является получить уравнение, связывающее данные вероятности и величины u, d и R (а именно, уравнение (8.12), заменяемое потом на уравнение (8.14)). Уравнение (8.14) используется для определения величин u и d.

Мы рассмотрим торговые стратегии с использованием двух активов: счета денежного рынка и бескупонных облигаций с погашением в некоторый выбранный момент времени T. Мы говорим, что задана торговая стратегия, если для каждого узла определена пара чисел

$$(\xi_0(t; s_t), \xi_1(t; s_t)).$$

$\xi_0(t; s_t)$ — число единиц счета денежного рынка, находящихся в портфеле в момент времени t при состоянии экономики s_t.

$\xi_1(t; s_t)$ — число бескупонных облигаций с погашением в момент времени T, находящихся в портфеле в момент времени t при состоянии экономики s_t.

Числа $\xi_0(t; s_t)$ и $\xi_1(t; s_t)$ не обязаны быть целыми и не обязаны быть неотрицательными.

Таким образом, стоимость портфеля в момент времени t при состоянии экономики s_t есть

$$\xi_0(t; s_t)\, B(t; s_{t-\tau}) + \xi_1(t; s_t)\, P(t, T; s_t).$$

Торговая стратегия является самофинансируемой, если при любом t, $\tau \leqslant t \leqslant T$ и при любом состоянии экономики s_t

$$\begin{gathered}\xi_0(t-\tau; s_{t-\tau})\, B(t; s_{t-\tau}) + \\ +\xi_1(t-\tau; s_{t-\tau})\, P(t, T; s_t) = \\ = \xi_0(t; s_t)\, B(t; s_{t-\tau}) + \xi_1(t; s_t)\, P(t, T; s_t).\end{gathered} \tag{8.9}$$

Условие (8.9) означает следующее. В момент времени t состав портфеля, остававшийся неизменным с момента времени $t-\tau$, может быть изменен. При этом стоимость портфеля после изменения должна быть той же самой, что и до изменения.

Самофинансируемая стратегия является арбитражной возможностью, если

$$\xi_0(0)\,B(0)+\xi_1(0)\,P(0,T)=0 \tag{8.10}$$

и существует такой момент времени t, $0<t\leqslant T$, что

$$\xi_0(t-\tau;s_{t-\tau})\,B(t;s_{t-\tau})+\xi_1(t-\tau;s_{t-\tau})\,P(t,T;s_t)$$

$$\begin{cases} \geqslant 0 & \text{для всех} \quad s_t \\ > 0 & \text{хотя бы для одного} \quad s_t. \end{cases} \tag{8.11}$$

Условие (8.10) означает, что стоимость портфеля в момент времени 0 равна нулю. Условие (8.11) означает, что в момент времени t стоимость данного самофинансируемого портфеля неотрицательна для всех состояний экономики и положительна для некоторых состояний экономики. Это возможность с положительной вероятностью превратить ничто в деньги без опасности оказаться в проигрыше. По-другому, арбитражную возможность называют денежной помпой.

Напомним, что T — это произвольный, но фиксированный момент времени.

Теорема. Следующие три условия эквивалентны.

(1) Среди самофинансируемых стратегий нет арбитражных возможностей.

(2) Для всех $t<T-\tau$ и для всех состояний s_t

$$d(t,T;s_t)<R(t;s_t)<u(t,T;s_t).$$

(3) Для любого $t \leqslant T - \tau$ и для любого состояния экономики s_t существует число $\pi(t, T; s_t)$ такое, что $0 < \pi(t, T; s_t) < 1$ и

$$\frac{P(t, T; s_t)}{B(t; s_{t-\tau})} = \pi(t, T; s_t)\frac{P(t+\tau, T; s_t u)}{B(t+\tau; s_t)} +$$

$$+(1 - \pi(t, T; s_t))\frac{P(t+\tau, T; s_t d)}{B(t+\tau; s_t)}.$$

Замечание. Если считать, что

$$s_{t+\tau} = \begin{cases} s_t u \text{ с вероятностью } & \pi(t, T; s_t) \\ s_t d \text{ с вероятностью } & 1 - \pi(t, T; s_t), \end{cases}$$

то правая часть равенства из условия (3) может быть интерпретирована как математическое ожидание случайной величины

$$\frac{P(t+\tau, T; s_{t+\tau})}{B(t+\tau; s_t)},$$

принимающей два значения; одно при $s_{t+\tau} = s_t u$ и другое при $s_{t+\tau} = s_t d$. Условие (3) означает, что при фиксированных t и s_t данное математическое ожидание равно

$$\frac{P(t, T; s_t)}{B(t; s_{t-\tau})}.$$

Доказательство разобьем на три этапа. Сначала докажем, что из условия (1) следует условие (2); затем докажем, что из условия (2) следует условие (3); наконец, докажем, что из условия (3) следует условие (1). Это и будет означать равносильность всех трех этих условий.

Этап 1. (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем, что из нарушения условия (2) следует существование арбитражных возможностей. Пусть, например,

$$R(t; s_t) \geqslant u(t, T; s_t) > d(t, T; s_t)$$

при некоторых t и s_t. Тогда арбитражной возможностью является следующая стратегия. Ничего не покупать и не продавать до момента времени t. Если в момент времени t экономика находится в каком-то другом состоянии, отличном от рассматриваемого s_t, то ничего не покупать и не продавать до момента времени T. Если в момент времени t экономика находится в состоянии s_t, то выпустить $1/P(t, T; s_t)$ облигаций (при этом будет получена сумма равная 1) и на полученные деньги купить $1/B(t; s_{t-\tau})$ единиц счета денежного рынка. В момент времени $(t+\tau)$ закрыть обе позиции. Образовавшиеся денежные средства будут неотрицательны при состоянии экономики $s_t u$ и положительны при состоянии экономики $s_t d$. Такая торговая стратегия является арбитражной возможностью.

Случай

$$R(t; s_t) \leqslant d(t, T; s_t) < u(t, T; s_t)$$

рассматривается аналогично.

Этап 2. (2) $\Rightarrow$ (3). Заметим, что при $t = T - \tau$ условие (3) выполняется с любым $\pi(t, T; s_t)$, поскольку $P(T, T) = 1$ при любом состоянии экономики. Пусть $t < T - \tau$. Тогда положим

$$\pi(t, T; s_t) = \frac{R(t; s_t) - d(t, T; s_t)}{u(t, T; s_t) - d(t, T; s_t)}.$$

На основании (2) $0 < \pi(t; s_t) < 1$. Имеем

$$R(t; s_t) = \pi(t, T; s_t)\, u(t, T; s_t) + (1 - \pi(t, T; s_t))\, d(t, T; s_t),$$

откуда

$$1 = \pi(t, T; s_t)\, \frac{u(t, T; s_t)}{R(t; s_t)} + (1 - \pi(t, T; s_t))\, \frac{d(t, T; s_t)}{R(t; s_t)}.$$

Умножим обе части этого равенства на

$$\frac{P(t, T; s_t)}{B(t; s_{t-\tau})}.$$

Имеем

$$\frac{P(t, T; s_t)}{B(t; s_{t-\tau})} = \pi(t, T; s_t)\, \frac{P(t+\tau, T; s_t u)}{B(t+\tau; s_t)} +$$

$$+ (1 - \pi(t, T; s_t))\, \frac{P(t+\tau, T; s_t d)}{B(t+\tau; s_t)},$$

что и требовалось доказать.

Этап 3. (3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что выполняется условие (3) и существует торговая стратегия, являющаяся арбитражной возможностью. Обозначим ее $\xi_0(t; s_t), \xi_1(t; s_t)$. Обозначим через s_t^* одно из тех состояний экономики, для которого в условии (8.11) выполняется строгое неравенство. Имеем

$$\xi_0(t-\tau; s_{t-\tau}^*)\, B(t-\tau; s_{t-2\tau}^*) + \xi_1(t-\tau; s_{t-\tau}^*)\, P(t-\tau, T; s_{t-\tau}^*) =$$

$$= B(t-\tau; s_{t-2\tau}^*) \Bigg(\xi_0(t-\tau; s_{t-\tau}^*) +$$

$$+\xi_1(t-\tau;s^*_{t-\tau})\frac{P(t-\tau,T;s^*_{t-\tau})}{B(t-\tau;s^*_{t-2\tau})}\Bigg)=$$

$$=B(t-\tau;s^*_{t-2\tau})\Bigg(\xi_0(t-\tau;s^*_{t-\tau})+\xi_1(t-\tau;s^*_{t-\tau})\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\pi(t-\tau,T;s^*_{t-\tau})\frac{P(t,T;s^*_{t-\tau}u)}{B(t;s^*_{t-\tau})}+$$

$$+(1-\pi(t-\tau,T;s^*_{t-\tau}))\frac{P(t,T;s^*_{t-\tau}d)}{B(t;s^*_{t-\tau})}\Bigg]\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{R(t-\tau;s^*_{t-\tau})}\Bigg(\pi(t-\tau,T;s^*_{t-\tau})\Big[\xi_0(t-\tau;s^*_{t-\tau})\,B(t;s^*_{t-\tau})+$$

$$+\xi_1(t-\tau;s^*_{t-\tau})\,P(t,T;s^*_{t-\tau}u)\Big]+$$

$$+(1-\pi(t-\tau,T;s^*_{t-\tau}))\Big[\xi_0(t-\tau;s^*_{t-\tau})\,B(t;s^*_{t-\tau})+$$

$$+\xi_1(t-\tau;s^*_{t-\tau})\,P(t,T;s^*_{t-\tau}d)\Big]\Bigg)>0.$$

Последнее неравенство следует из определения арбитражной возможности, так как оба выражения в квадратных скобках неотрицательны и хотя бы одно из них положительно. Из условия самофинансируемости получаем

$$\xi_0(t-2\tau;s^*_{t-2\tau})\,B(t-\tau;s^*_{t-2\tau})+$$

$$+\xi_1(t-2\tau;s^*_{t-2\tau})\,P(t-\tau,T;s^*_{t-\tau})>0.$$

Повторяя аналогичные выкладки, имеем

$$\xi_0(t-3\tau;s^*_{t-3\tau})\,B(t-2\tau;s^*_{t-3\tau})+$$
$$+\xi_1(t-3\tau;s^*_{t-3\tau})\,P(t-2\tau,T;s^*_{t-2\tau})>0.$$

Продолжая таким образом до момента времени 0, получаем

$$\xi_0(0)\,B(0)+\xi_1(0)\,P(0,T)>0,$$

что противоречит определению арбитражной возможности.

Теорема доказана.

Теперь мы установим, что при любых t и s_t числа $\pi(t,T;s_t)$ одинаковы для всех $T>t+\tau$.

Рассмотрим некоторый актив, по которому в какой-то момент времени T_1 (и только в этот момент времени) производятся определенные выплаты, вообще говоря, зависящие от состояния экономики s_{T_1}. Размер этой выплаты обозначим через $x(T_1,s_{T_1})$.

Мы покажем, что если выбрано $T>T_1$, то существует единственная самофинансируемая торговая стратегия

$$(\xi_0(t;s_t),\xi_1(t;s_t))$$

с использованием двух активов, счета денежного рынка и бескупонных облигаций с погашением в момент времени T, такая, что в любой момент времени $t\leqslant T_1$ и при любом состоянии экономики s_t цена рассматриваемого актива $x(t;s_t)$ должна быть принята равной

$$\xi_0(t;s_t)\,B(t;s_{t-\tau})+\xi_1(t;s_t)\,P(t,T;s_t).$$

При этом $\xi_0(t;s_t)$ и $\xi_1(t;s_t)$ определяются по некоторым явным формулам. Другое значение цены рассматриваемого актива означало бы наличие арбитражной возможности с использованием следующих трех активов: счета денежного рынка, бескупонных облигаций с погашением в момент времени T и данного актива.

Построение самофинансируемой стратегии производится обычным способом индукцией назад. Пусть $t < T_1$ и предположим, что для момента времени $(t+\tau)$ и для всех состояний экономики $s_{t+\tau}$ цены $x(t+\tau; s_{t+\tau})$ известны. В момент времени t при состоянии экономики s_t построим портфель из $\xi_0(t; s_t)$ единиц счета денежного рынка и $\xi_1(t; s_t)$ облигаций с погашением в момент времени T, стоимость которого при любом будущем состоянии экономики, $s_t u$ или $s_t d$, будет совпадать с ценой простого контингентного требования. Должны выполняться соотношения

$$\xi_0(t; s_t)\, B(t; s_{t-\tau})\, R(t; s_t) +$$

$$+\xi_1(t; s_t)\, P(t, T; s_t)\, u(t, T; s_t) = x(t+\tau; s_t u);$$

$$\xi_0(t; s_t)\, B(t; s_{t-\tau})\, R(t; s_t) +$$

$$+\xi_1(t; s_t)\, P(t, T; s_t)\, d(t, T; s_t) = x(t+\tau; s_t d).$$

Отсюда

$$\xi_0(t; s_t) = \frac{x(t+\tau; s_t d)\, u(t, T; s_t) - x(t+\tau; s_t u)\, d(t, T; s_t)}{B(t; s_{t-\tau})\, R(t; s_t)\, (u(t, T; s_t) - d(t, T; s_t))},$$

$$\xi_1(t; s_t) = \frac{x(t+\tau; s_t u) - x(t+\tau; s_t d)}{P(t, T; s_t)\, (u(t, T; s_t) - d(t, T; s_t))}.$$

Найдем выражение для $x(t; s_t)$. Имеем

$$x(t; s_t) = \xi_0(t; s_t)\, B(t; s_{t-\tau}) + \xi_1(t; s_t)\, P(t, T; s_t) =$$

$$= \frac{1}{R(t; s_t)} \left[x(t+\tau; s_t u)\, \frac{R(t; s_t) - d(t, T; s_t)}{u(t, T; s_t) - d(t, T; s_t)} + \right.$$

$$\left. + x(t+\tau; s_t d)\, \frac{u(t, T; s_t) - R(t; s_t)}{u(t, T; s_t) - d(t, T; s_t)} \right].$$

Если использовать обозначение

$$\pi(t, T; s_t) = \frac{R(t; s_t) - d(t, T; s_t)}{u(t, T; s_t) - d(t, T; s_t)}, \tag{8.12}$$

соответствующее тому, которое было сделано в доказательстве теоремы, то окончательно формулу можно записать в следующем виде

$$x(t; s_t) = \frac{1}{R(t; s_t)} \left[\pi(t, T; s_t)\, x(t+\tau; s_t u) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \pi(t, T; s_t)\right) x(t+\tau; s_t d) \right]. \tag{8.13}$$

В качестве актива может быть рассмотрена бескупонная облигация с погашением в момент времени T_1. Тогда из формулы (8.13) следует, что

$$P(t, T_1; s_t) = \frac{1}{R(t; s_t)} \left[\pi(t, T; s_t)\, P(t+\tau, T_1; s_t u) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \pi(t, T; s_t)\right) P(t+\tau, T_1; s_t d) \right].$$

Но из теоремы, доказанной в этом разделе, следует, что при $t < T_1 - \tau$

$$P(t,T_1;s_t) = \frac{1}{R(t;s_t)}\left[\pi(t,T_1;s_t)\,P(t+\tau,T_1;s_t u)+\right.$$

$$\left.+\,(1-\pi(t,T_1;s_t))\,P(t+\tau,T_1;s_t d)\right].$$

Поскольку $P(t+\tau,T_1;s_t d) < P(t+\tau,T_1;s_t u)$, получаем

$$\pi(t,T_1;s_t) = \pi(t,T;s_t).$$

Это означает, что в формуле (8.12) вместо обозначения $\pi(t,T;s_t)$ можно использовать обозначение $\pi(t;s_t)$.

Вернемся к случаю, когда для всех моментов времени t и для всех состояний экономики s_t вероятность $\pi(t;s_t) = 0,5$. Тогда уравнение (8.12) принимает вид

$$\frac{1}{2} = \frac{R(t;s_t) - d(t,T;s_t)}{u(t,T;s_t) - d(t,T;s_t)}. \tag{8.14}$$

Дальнейшая работа основана на уравнении (8.14), верном для всех моментов времени t, для всех состояний экономики s_t и для всех $T > t+\tau$, а также на уравнениях (8.5), (8.7) и (8.8).

Пусть $T = t + k\tau$, где $k \geqslant 2$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} m &= \sum_{j=1}^{k-1} \mu(t,t+j\tau;s_t)\,\tau, \\ s &= \sum_{j=1}^{k-1} \sigma(t,t+j\tau;s_t)\,\sqrt{\tau} \end{aligned} \tag{8.15}$$

и подставим выражения (8.5) в уравнения (8.7) и (8.8). Тогда

$$\begin{aligned} u(t,T;s_t) &= R(t;s_t)\,\exp(-m+s),\\ d(t,T;s_t) &= R(t;s_t)\,\exp(-m-s). \end{aligned} \tag{8.16}$$

Используя условие (8.14), находим

$$\frac{1}{2} = \frac{1-e^{-m}e^{-s}}{e^{-m}e^{s}-e^{-m}e^{-s}},$$

откуда

$$e^{m} = \frac{1}{2}(e^{s}+e^{-s}) = \mathrm{ch}(s). \tag{8.17}$$

Из условия (8.16) получаем

$$u(t,T;s_t) = R(t;s_t)\,\frac{e^{s}}{\mathrm{ch}(s)}, \quad d(t,T;s_t) = R(t;s_t)\,\frac{e^{-s}}{\mathrm{ch}(s)}.$$

Таким образом, процесс (8.6) для цен облигаций записывается в виде

$$P(t+\tau,T;s_{t+\tau}) =$$

$$= \begin{cases} P(t,T;s_t)\,R(t;s_t)\,\dfrac{e^{s}}{\mathrm{ch}(s)} & \text{при} \quad s_{t+\tau}=s_t u \\ P(t,T;s_t)\,R(t;s_t)\,\dfrac{e^{-s}}{\mathrm{ch}(s)} & \text{при} \quad s_{t+\tau}=s_t d, \end{cases} \tag{8.18}$$

где $s = s(t,T;s_t)$ определено в (8.15).

Замечание. Из формул (8.15) и (8.17) получаем, что при $k=2$

$$\exp[\mu(t,t+\tau;s_t)\,\tau] = \mathrm{ch}[\sigma(t,t+\tau;s_t)\,\sqrt{\tau}\,] \tag{8.19}$$

и при $k > 2$ и $T = t + k\,\tau$

$$\exp[\mu(t,T;s_t)\,\tau] = \frac{\operatorname{ch}\left[\sum\limits_{j=1}^{k}\sigma(t,t+j\tau;s_t)\sqrt{\tau}\right]}{\operatorname{ch}\left[\sum\limits_{j=1}^{k-1}\sigma(t,t+j\tau;s_t)\sqrt{\tau}\right]}. \qquad (8.20)$$

Формулы (8.19) и (8.20) показывают, что функция μ может быть определена по функции σ.

Если σ_f является константой, то цена бескупонной облигации $P(t,T;s_t)$ зависит от состояния экономики s_t следующим образом. Пусть $t = n\tau$, $T = k\tau$, $n < k$. Тогда s_t — это набор из n символов u и d. Оказывается, $P(t,T;s_t)$ зависит только от количества символов u и символов d в наборе s_t, но не зависит от того, в каком порядке эти символы входят в набор s_t. Докажем соответствующее утверждение.

Свяжем с набором s_t набор чисел $l_1, l_2, \dots, l_n$, где

$$l_i = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-м месте в наборе } s_t \text{ стоит } u \\ -1, & \text{если на } i\text{-м месте в наборе } s_t \text{ стоит } d. \end{cases}$$

Утверждение. При $2 \leqslant m \leqslant n$

$$P(m\tau, T; s_t^m) =$$
$$= e^{(l_1+\dots+l_m)(k-m)\sigma\sqrt{\tau}}\,\frac{\operatorname{ch}(\sigma\sqrt{\tau})\cdot\ldots\cdot\operatorname{ch}((m-1)\sigma\sqrt{\tau})}{\operatorname{ch}((k-1)\sigma\sqrt{\tau})\cdot\ldots\cdot\operatorname{ch}((k-m)\sigma\sqrt{\tau})},$$

где через s_t^m обозначен набор, содержащий первые m символов набора s_t.

Доказательство. Из (8.18) и (8.15) при $T = k\tau$ имеем

$$P(\tau, T; s_t^1) = P(0,T)\,R(0)\,\frac{e^{l_1(k-1)\sigma\sqrt{\tau}}}{\operatorname{ch}((k-1)\sigma\sqrt{\tau})},$$

$$P(2\tau, T; s_t^2) = P(\tau, T; s_t^1)\, R(\tau; s_t^1)\, \frac{e^{l_2(k-2)\sigma\sqrt{\tau}}}{\mathrm{ch}((k-2)\sigma\sqrt{\tau}\,)},$$

где

$$R(\tau; s_t^1) = \frac{1}{P(\tau, 2\tau; s_t^1)} = \frac{1}{P(0,T)\, R(0)}\, \frac{\mathrm{ch}(\sigma\sqrt{\tau}\,)}{e^{l_1\sigma\sqrt{\tau}}}.$$

Отсюда

$$P(2\tau, T; s_t^2) =$$

$$= e^{(l_1+l_2)(k-2)\sigma\sqrt{\tau}}\, \frac{\mathrm{ch}(\sigma\sqrt{\tau})}{\mathrm{ch}((k-1)\sigma\sqrt{\tau})\, \mathrm{ch}((k-2)\sigma\sqrt{\tau})}.$$

При $m = 2$ утверждение доказано. Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Допустим, что при $(m-1)$ утверждение верно, т.е.

$$P((m-1)\tau, T; s_t^{m-1}) = e^{(l_1+\ldots+l_{m-1})(k-m+1)\sigma\sqrt{\tau}}\,\cdot$$

$$\cdot\, \frac{\mathrm{ch}(\sigma\sqrt{\tau}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{ch}((m-2)\sigma\sqrt{\tau})}{\mathrm{ch}((k-1)\sigma\sqrt{\tau}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{ch}((k-m+1)\sigma\sqrt{\tau})}.$$

Докажем утверждение для m. Из (8.18) и (8.15) имеем

$$P(m\tau, T; s_t^m) =$$

$$= P((m-1)\tau, T; s_t^{m-1})\, R((m-1)\tau; s_t^{m-1})\, \frac{e^{l_m(k-m)\sigma\sqrt{\tau}}}{\mathrm{ch}((k-m)\sigma\sqrt{\tau}\,)}.$$

Здесь

$$R((m-1)\tau; s_t^{m-1}) = \frac{1}{P((m-1)\tau, m\tau; s_t^{m-1})}.$$

Но по предположению индукции (при $k = m$)

$$P((m-1)\tau, m\tau; s_t^{m-1}) = e^{(l_1+\ldots+l_{m-1})\sigma\sqrt{\tau}}\, \frac{1}{\mathrm{ch}((m-1)\sigma\sqrt{\tau}\,)}.$$

Окончательно получаем

$$P(m\tau, T; s_t^m) =$$
$$= e^{(l_1+\ldots+l_m)(k-m)\sigma\sqrt{\tau}}\,\frac{\mathrm{ch}(\sigma\sqrt{\tau})\cdot\ldots\cdot\mathrm{ch}((m-1)\sigma\sqrt{\tau})}{\mathrm{ch}((k-1)\sigma\sqrt{\tau})\cdot\ldots\cdot\mathrm{ch}((k-m)\sigma\sqrt{\tau})}.$$

Утверждение доказано.

Уравнения (8.19) и (8.20) содержат в себе неожиданный вывод: функция μ однозначно определяется по функции σ. Что это действительно может быть так, нетрудно понять, рассмотрев в качестве исходной не стохастическую модель с непрерывным временем для форвардной ставки, а стохастическую модель с непрерывным временем для цены бескупонной облигации, когда цена бескупонной облигации является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dP(t,T) = \mu_P(t)P(t,T)dt + \nu(t,T)P(t,T)dz_t, \qquad (8.21)$$

где z_t — стандартное броуновское движение. Имеем

$$f(t,T,T+\tau) = \frac{\ln P(t,T) - \ln P(t,T+\tau)}{\tau}.$$

По формуле Ито

$$d\ln P(t,T) = (\mu_P(t) - 0,5\,\nu^2(t,T))dt + \nu(t,T)dz_t,$$

$$d\ln P(t,T+\tau) = (\mu_P(t) - 0,5\,\nu^2(t,T+\tau))dt + \nu(t,T+\tau)dz_t.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} df(t,T,T+\tau) = &\ \frac{\nu^2(t,T+\tau) - \nu^2(t,T)}{2\tau}dt- \\ &-\frac{\nu(t,T+\tau) - \nu(t,T)}{\tau}dz_t. \end{aligned} \qquad (8.22)$$

Отметим, что при стремлении τ к 0 коэффициент при dt стремится к

$$\nu(t,T)\,\frac{\partial\nu(t,T)}{\partial T},$$

а коэффициент при dz_t стремится к

$$-\frac{\partial\nu(t,T)}{\partial T}.$$

Из условия $\nu(t,t)=0$ следует, что

$$\nu(t,T)=\int\limits_t^T\frac{\partial\nu(t,s)}{\partial s}\,ds.$$

Отсюда следует, что при выполнении условия (8.21) уравнение (8.1) принимает вид (8.22) и коэффициент μ_f выражается через коэффициент σ_f. Формулы (8.19) и (8.20) устанавливают этот же факт для дискретного случая.

9. Сравнение метода Хита — Джерроу — — Мортона с другими подходами, используемыми при оценке и хеджировании

Целью этого раздела не является дать исчерпывающее сравнение метода Хита — Джерроу — Мортона с другими методами расчетов. Здесь на нескольких модельных примерах показано, что результаты, полученные с использованием различных методов, достаточно хорошо согласуются между собой. Это не исключает, естественно, возможности существования и таких задач, где совпадение результатов, полученных при помощи различных методов, может быть и не таким хорошим. В первой части этого раздела проводится сравнение метода Хита — Джерроу — Мортона и метода Блэка — Дермана — Тоя на примере расчета цены европейского опциона пут на бескупонную облигацию. Во второй части раздела рассматривается задача хеджирования купонной облигации фьючерсным контрактом на некоторую другую облигацию; сравниваются стратегия хеджирования, основанная на расчете дюрации, и стратегия хеджирования, основанная на методе Хита — Джерроу — Мортона.

Оценка европейского опциона пут с использованием метода Хита — Джерроу — Мортона и метода Блэка — Дермана — Тоя. Пусть математической моделью для цены бескупонной облигации с погашением в произвольный, но фиксированный момент времени T является случайный процесс, доставляющий решение стохастическому дифференциальному уравнению

$$dP(t,T) = \mu_P(t)P(t,T)dt + \nu(t,T)P(t,T)dz_t,$$

где z_t — стандартное броуновское движение и

$$\nu(t,T) = -\sigma_f(T-t),$$

σ_f — константа.

Из уравнения (8.22) вытекает, что математической моделью для форвардной ставки в этом случае является случайный процесс, доставляющий решение стохастическому дифференциальному уравнению

$$df(t,T,T+\tau) = (\ldots)\, dt + \sigma_f\, dz_t.$$

Данное уравнение является частным случаем уравнения (8.1), которое было отправной точкой в методе Хита — Джерроу — Мортона. Как уже отмечалось, если σ_f — константа, то метод Хита — Джерроу — Мортона по окончательным расчетным формулам совпадает с предложенным ранее методом Хо — Ли.

Чтобы найти волатильности доходностей бескупонных облигаций, требуемые в подходе Блэка — Дермана — Тоя, из уравнения

$$P(t,T) = \frac{1}{(1+\tau\, y(t,T))^{(T-t)/\tau}}$$

выразим $y(t,T)$ через $P(t,T)$ и воспользуемся формулой Ито. Формула Ито показывает, что случайный процесс $y(t,T)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(t,T) = (\ldots)dt + \sigma_f\,(1+\tau\, y(t,T))\, dz_t,$$

а случайный процесс $\ln y(t,T)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\ln y(t,T) = (\dots)dt + \sigma_f \, \frac{1+\tau\, y(t,T)}{y(t,T)}\, dz_t.$$

Поэтому дисперсия случайной величины $\ln y(\tau,T)$ может быть принята равной

$$\left(\sigma_f \, \frac{1+\tau\, y(0,T)}{y(0,T)}\right)^2 \tau.$$

В соответствии с формулой (4.1) это означает, что волатильность доходности имеет вид

$$\sigma_y(0,T) = \sigma_f \, \frac{1+\tau\, y(0,T)}{y(0,T)}.$$

Пример. Рассмотрим европейский опцион пут на бескупонную облигацию с номиналом 1 руб. с погашением через 5 лет. Срок истечения опциона 2,5 года; цена исполнения 0,85 руб. Требуется рассчитать цену этого опциона.

Расчеты проведены для трех вариантов, где различаются срочная структура процентной ставки и волатильность форвардной ставки. Для каждого варианта расчеты были проведены и по методу Блэка — Дермана — Тоя, и по методу Хита — Джерроу — Мортона. Каждый вариант рассчитан с четырьмя различными значениями временного шага τ.

Вариант 1. $r_c(0,T) = 0,1$ при всех $T > 0$ и $\sigma_f = 0,01$. В табл. 9.1 приведены рассчитанные цены опциона.

Таблица 9.1. *Цены европейского опциона пут на бескупонную облигацию, рассчитанные с различными временными шагами τ по методу Хита — Джерроу — Мортона (ХДМ) и по методу Блэка — Дермана — Тоя (БДТ) при непрерывно начисляемой ставке спот $r_c(0,T) = 0,1$ и волатильности форвардной ставки $\sigma_f = 0,01$*

	τ			
	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{128}$
ХДМ	0,055513	0,055556	0,055561	0,055559
БДТ	0,055462	0,055465	0,055469	0,055469

Оба способа расчета показывают, что при рассматриваемых условиях этот опцион должен стоить примерно 0,055 руб. Разумеется, если рассматривать бескупонную облигацию с номиналом не 1 руб., а, например, 1 млн. руб., то и цена опциона должна увеличиться в 1 млн. раз. Опцион на право продать такую облигацию через 2,5 года за 850 тыс. руб. должен стоить примерно 55 тыс. руб.

Вариант 2. Рассмотрим срочную структуру процентной ставки

$$r_c(0,T) = 0,08 - 0,05\exp(-0,18\,T)$$

при $T > 0$. (Примерно такой была срочная структура процентной ставки в США в начале 1994 г. (см. [44, с. 442]).) По-прежнему $\sigma_f = 0,01$. В табл. 9.2 приведены рассчитанные цены опциона.

Таблица 9.2. *Цены европейского опциона пут на бескупонную облигацию, рассчитанные с различными временными шагами τ по методу Хита — Джерроу — Мортона (ХДМ) и по методу Блэка — Дермана — Тоя (БДТ) при непрерывно начисляемой ставке спот $r_c(0,T) = 0,08 - 0,05\exp(-0,18\,T)$ и волатильности форвардной ставки $\sigma_f = 0,01$*

	τ			
	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{128}$
ХДМ	0,018805	0,018489	0,018527	0,018526
БДТ	0,018549	0,018278	0,018058	0,018117

По сравнению с вариантом 1 произошло заметное уменьшение цены опциона пут. Это естественно. Уменьшение процентных ставок приводит к увеличению цены облигации и, следовательно, к уменьшению цены опциона пут при фиксированной цене исполнения опциона.

Вариант 3. Срочная структура процентной ставки та же, что и в варианте 2, но $\sigma_f = 0,02$. В табл. 9.3 приведены рассчитанные цены опциона.

По сравнению с вариантом 2 увеличение волатильности форвардной ставки привело к увеличению цены опциона.

Приведенные результаты расчетов позволяют сделать вывод о хорошем совпадении для данного примера цен опциона, полученных по методу Блэка — Дермана — Тоя и по методу Хита — Джерроу — Мортона. При $\tau = 5/128$ различие в ценах составило $0,90 \cdot 10^{-4}$; $4,09 \cdot 10^{-4}$ и $4,88 \cdot 10^{-4}$ для вариантов 1, 2 и 3 соответственно.

Таблица 9.3. *Цены европейского опциона пут на бескупонную облигацию, рассчитанные с различными временными шагами* τ *по методу Хита — Джерроу — Мортона (ХДМ) и по методу Блэка — Дермана — Тоя (БДТ) при непрерывно начисляемой ставке спот* $r_c(0,T) = 0{,}08 - 0{,}05\exp(-0{,}18\,T)$ *и волатильности форвардной ставки* $\sigma_f = 0{,}02$

	τ			
	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{128}$
ХДМ	0,030452	0,030189	0,029911	0,029815
БДТ	0,029116	0,029269	0,029319	0,029327

Отметим, что при расчете по методу Хита — Джерроу — Мортона краткосрочные ставки в некоторых узлах могут быть отрицательными. Метод Блэка — Дермана — Тоя свободен от этого недостатка. Впрочем, этот недостаток, которым обладает ряд методов, теоретиками иногда воспринимается более серьезно, чем практиками.

Сравнение стратегии хеджирования, основанной на расчете дюрации, и стратегии хеджирования, построенной с использованием метода Хита — Джерроу — Мортона для купонной облигации. Пусть активы A и B обладают следующим свойством. Если доходность актива A увеличивается, то доходность актива B всегда уменьшается, и наоборот. Если удается составить портфель из активов A и B в таких пропорциях, что потери по сравнению с безрисковым инвестированием становятся невозможными, то говорят, что осуществлено идеальное хеджирование.

На практике хеджирование может быть более или менее близко к идеальному. Один из подходов к выработке стратегий хеджирования связан с расчетом дюраций. Привлекательной стороной этого подхода является то, что нет необходимости использовать сложный математический аппарат. Но набор финансовых инструментов, к которым такой подход может быть применен, достаточно ограничен. Подробное описание этих методов можно найти в книге [7].

Рассмотрим облигацию (или портфель облигаций), по которой в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$ производятся выплаты $C_1, \ldots, C_n$. Если r_i — это непрерывно начисляемая ставка для заимствований на срок t_i, то стоимость такой облигации в момент времени 0

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i\, e^{-r_i t_i}.$$

Положим

$$D_P = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} C_i\, t_i\, e^{-r_i t_i}.$$

Величина D_P называется *дюрацией* облигации. Заметим, что

$$D_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, t_i,$$

где

$$\alpha_i = \frac{C_i\, e^{-r_i t_i}}{\sum_{j=1}^{n} C_j\, e^{-r_j t_j}}$$

— отношение текущей стоимости выплат, производимых в момент времени t_i, к текущей стоимости всех выплат. В частности, при $n = 1$ дюрация $D_P = t_1$.

Предположим теперь, что значения ставок мгновенно изменились, и вместо r_i ставка заимствования на срок t_i стала (r_i+u) (т.е. произошел параллельный сдвиг всех ставок на одну и ту же величину вверх или вниз). Тогда стоимость облигации в момент времени 0

$$P(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, e^{-(r_i+u)t_i}.$$

Имеем

$$\frac{dP}{du} = -\sum_{i=1}^{n} C_i\, t_i\, e^{-(r_i+u)t_i}.$$

Поэтому

$$\left.\frac{dP}{du}\right|_{u=0} = -P(0)\, D_P.$$

При малом изменении Δu параметра u изменение цены облигации может быть рассчитано по формуле

$$\Delta P = -P(0)\, D_P\, \Delta u.$$

Защититься от риска, связанного с изменением цены облигации, можно, например, открыв фьючерсную позицию, для которой базовым активом является какая-то другая облигация. (Функционирование рынка фьючерсов описано, например, в книге [68].)

Пусть $F(u)$ — это фьючерсная цена при процентных ставках (r_i+u), базовым активом для фьючерса является некоторая облигация (вообще говоря, отличающаяся от первой облигации). Пусть для хеджирования открыто h фьючерсных позиций покупателя. Тогда при изменении всех ставок от r_i до $(r_i + u)$ на маржевый счет зачисляется сумма

$$h(F(u) - F(0)) = h\,\Delta F.$$

Предположим, что

$$\Delta F = -F(0)\,D_F\,\Delta u,$$

где D_F — это дюрация облигации, на которую заключен фьючерсный контракт. Тогда при изменении Δu параметра u стоимость портфеля претерпевает изменение

$$\Delta P + h\,\Delta F = -(P(0)\,D_P + h\,F(0)\,D_F)\,\Delta u.$$

Чтобы изменение стоимости портфеля, обусловленное изменением процентных ставок, было равно 0, число открытых фьючерсных позиций должно быть равно

$$h = -\frac{P(0)\,D_P}{F(0)\,D_F}. \tag{9.1}$$

Пример. Рассмотрим облигацию с погашением через 12 лет с номиналом 100 руб., по которой раз в полгода выплачивается купон 5 руб. По этой облигации занята длинная позиция. С целью защиты от неблагоприятного изменения процентных ставок производится хеджирование этой облигации фьючерсным контрактом. Для фьючерсных контрактов базовым активом являются облигации с погашением через 10 лет с номиналом 100 руб., по которым раз в полгода выплачивается купон 4 руб.

Пусть для всех сроков заимствования непрерывно начисляемая ставка спот одинакова: $r_i = 0,09$ для любого i. Тогда

$$P(0) = 105,699198, \qquad D_P = 7,37951340.$$

Будем считать, для простоты, что фьючерсная цена во всех случаях совпадает с ценой облигации, на которую заключен фьючерсный контракт. Тогда

$$F(0) = 92,228370, \qquad D_F = 6,93116403.$$

Из (9.1) получаем

$$h = -\frac{105,699198 \cdot 7,37951340}{92,228370 \cdot 6,93116403} = -1,22019351.$$

Рассмотрим стратегию, когда на каждую облигацию с погашением через 12 лет открыто $h = -1,22019351$ фьючерсных позиций. Пусть теперь процентные ставки изменились и для всех сроков заимствования остались одинаковыми, но стали равными не $r = 0,09$, а равными $(r + u)$. Табл. 9.4 дает ответ на вопрос, что происходит со стоимостью рассматриваемого портфеля при различных u от $-0,04$ до 0,04.

Из табл. 9.4 видно, что при сделанных допущениях относительно поведения процентных ставок и фьючерсных цен описанная стратегия хеджирования полностью защищает от процентного риска. Больше того, при исходном значении процентной ставки 0,09 стоимость портфеля оказывается самой маленькой (но это не обязательная черта для данного класса стратегий хеджирования).

Таблица 9.4. *Стоимость портфеля, состоящего из облигации и из h фьючерсных контрактов на другую облигацию, при различных значениях процентной ставки* $(r + u)$; $h = -1,22019351$

Процентная ставка $(r+u)$	Стоимость облигации $P(u)$	Поступление на маржевый счет $h(F(u) - F(0))$	Стоимость портфеля $P(u)+$ $+h(F(u) - F(0))$
0,050	143,9956	-37,3332	106,6624
0,055	138,3280	-31,9190	106,4090
0,060	132,9398	-26,7386	106,2013
0,065	127,8161	-21,7812	106,0349
0,070	122,9428	-17,0367	105,9061
0,075	118,3067	-12,4954	105,8113
0,080	113,8952	-8,1480	105,7472
0,085	109,6964	-3,9857	105,7108
0,090	105,6992	0,0000	105,6992
0,095	101,8929	3,8170	105,7099
0,100	98,2675	7,4731	105,7406
0,105	94,8136	10,9754	105,7890
0,110	91,5222	14,3310	105,8532
0,115	88,3849	17,5464	105,9313
0,120	85,3935	20,6280	106,0215
0,125	82,5407	23,5819	106,1225
0,130	79,8191	26,4136	106,2327

Интересно посмотреть, насколько результаты хеджирования зависят от точности определения дюраций. Предположим, что мы бы определили дюрации округленно:

$$D_P = 7, \qquad D_F = 7.$$

Тогда

$$h = -\frac{105,699198 \cdot 7}{92,228370 \cdot 7} = -1,14605949.$$

Результаты хеджирования с таким h при различных значениях ставок $(r + u)$ показаны в табл. 9.5.

Как видно, при увеличении процентных ставок данная стратегия не полностью защищает от потерь, хотя и значительно уменьшает риск.

Таблица 9.5. *Стоимость портфеля, состоящего из облигации и из h фьючерсных контрактов на другую облигацию, при различных значениях процентной ставки* $(r+u)$; $h = -1,14605949$

Процентная ставка $(r+u)$	Стоимость облигации $P(u)$	Поступление на маржевый счет $h(F(u) - F(0))$	Стоимость портфеля $P(u)+$ $+h(F(u) - F(0))$
0,050	143,9956	-35,0650	108,9306
0,055	138,3280	-29,9797	108,3483
0,060	132,9398	-25,1140	107,8258
0,065	127,8161	-20,4579	107,3582
0,070	122,9428	-16,0016	106,9412
0,075	118,3067	-11,7362	106,5705
0,080	113,8952	-7,6530	106,2422
0,085	109,6964	-3,7435	105,9529
0,090	105,6992	0,0000	105,6992
0,095	101,8929	3,5851	105,4780
0,100	98,2675	7,0190	105,2866
0,105	94,8136	10,3086	105,1222
0,110	91,5222	13,4603	104,9825
0,115	88,3849	16,4803	104,8652
0,120	85,3935	19,3747	104,7683
0,125	82,5407	22,1491	104,6898
0,130	79,8191	24,8089	104,6280

Продолжим рассмотрение примера, но теперь стратегию хеджирования облигации с погашением через 12 лет будем строить с использованием метода Хита — Джерроу — Мортона. Облигацию с погашением через 12 лет назовем облигацией X, а облигацию с погашением через 10 лет — облигацией Y. Цену P будем обозначать P_X, а цену F будем обозначать P_Y.

Вместо хеджирования облигации X фьючерсным контрактом по облигации Y можно произвести хеджирование облигации X, заняв короткую позицию по облигациям Y (мы, собственно, это уже сделали, предположив, что фьючерсная цена совпадает с ценой облигации Y).

Как и в разделе 8, рассмотрим торговую стратегию (ξ_0, ξ_1), обладающую тем свойством, что портфель, составленный в момент времени 0 из ξ_0 единиц счета денежного рынка и ξ_1 облигаций Y при любом состоянии экономики, возможном в момент времени τ (а таких состояний в методе Хита — Джерроу — Мортона может быть два, u и d), стоит столько же, сколько облигация X. Это означает, что должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \xi_0\, R(0) + \xi_1\, P_Y(\tau; u) &= P_X(\tau; u) \\ \xi_0\, R(0) + \xi_1\, P_Y(\tau; d) &= P_X(\tau; d). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Каждая из облигаций X и Y может рассматриваться как портфель, состоящий из бескупонных облигаций. Цена облигации X или облигации Y равна сумме цен бескупонных облигаций, входящих в соответствующий портфель. А цена любой бескупонной облигации в рамках метода Хита — Джерроу — Мортона может быть определена по формулам (8.18). Например, при $\tau = 0,1$, $\sigma_f = 0,01$

$$P_X(\tau; u) = 109,109110, \qquad P_X(\tau; d) = 104,200460,$$

$$P_Y(\tau; u) = 95,071976, \qquad P_Y(\tau; d) = 91,052368.$$

Из уравнений (9.2)

$$\xi_1 = \frac{P_X(\tau; u) - P_X(\tau; d)}{P_Y(\tau; u) - P_Y(\tau; d)}.$$

В табл. 9.6 приведены рассчитанные значения ξ_1 для нескольких τ и σ_f.

Таблица 9.6. *Количество облигаций Y, используемых для хеджирования одной облигации X, рассчитанное по методу Хита — Джерроу — Мортона при различных волатильностях форвардной ставки σ_f и различных временных шагах τ*

τ	σ_f	ξ_1
0,1	0,01	1,22117602
0,025	0,01	1,22043614
0,005	0,01	1,22024188
0,001	0,01	1,22020317
0,001	0,1	1,22010130
0,001	0,001	1,22020419

Напомним, что в стратегии хеджирования, основанной на расчете дюраций, было получено значение

$$(-h) = 1,22019351.$$

Значения ξ_1 достаточно хорошо совпадают с этим числом и, как показывают приведенные результаты расчетов, слабо зависят от шага по времени τ и от волатильности форвардной ставки σ_f.

Библиографический список

1. Amin K.I., Bodurtha J.N. Discrete-Time Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates // Review of Financial Studies. 1995. Vol. 8. P. 193 — 234.

2. Anderson N., Breedon F., Deacon M., Derry A., Murphy G. Estimating and Interpreting the Yield Curve. Chichester: Wiley, 1996.

3. Attari M. Discontinuous Interest Rate Processes: An Equilibrium Model for Bond Option Prices // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1999. Vol. 34. P. 293 — 322.

4. Babbs S.H., Nowman K.B. Kalman Filtering of Generalized Vasicek Term Structure Models // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1999. Vol. 34. P. 115 — 130.

5. Back K. Asymmetric Information and Options // Review of Financial Studies. 1993. Vol. 6. P. 435 — 472.

6. Baxter M., Rennie A. Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

7. Bierwag G.O. Duration Analysis: Managing Interest Rate Risk. Cambridge (MA): Ballinger, 1987.

8. Bjerksund P., Stensland G. Implementation of the Black — Derman — Toy Interest Rate Model // Journal of Fixed Income. 1996. Vol. 6. P. 67 — 75.

9. Black F. The Pricing of Commodity Contracts // Journal of Financial Economics. 1976. Vol. 3. P. 167 — 179.

10. Black F., Derman E., Toy W. A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options // Financial Analysts Journal. 1990. Vol. 46. P. 33 — 39.

11. Black F., Karasinski P. Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal // Financial Analysts Journal. 1991. Vol. 47. P. 52 — 59.

12. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637 — 654.

13. Boyle P.P., Broadie M., Glasserman P. Monte Carlo Methods for Security Pricing // Journal of Economic Dynamics and Control. 1997. Vol. 21. P. 1267 — 1321.

14. Brenner R.J., Harjes R.H., Kroner K.F. Another Look at Models of the Short-Term Interest Rate // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1996. Vol. 31. P. 85 — 107.

15. Briys E., Bellalah M., Mai H.M., de Varenne F. Options, Futures and Exotic Derivatives. Chichester: Wiley, 1998.

16. Buhler W., Uhrig-Homburg M., Walter U., Weber T. An Empirical Comparison of Forward-Rate and Spot-Rate Models for Valuing Interest-Rate Options // Journal of Finance. 1999. Vol. 54. P. 269 — 305.

17. Calzolari G., Di Iorio F., Fiorentini G. Control Variates for Variance Reduction in Indirect Inference: Interest Rate Models in Continuous Time // Econometrics Journal. 1998. Vol. 1. P. 100 — 112.

18. Campbell C.J., Kazemi H.B., Nanisetty P. Time-Varying Risk and Return in the Bond Market: A Test of New Equilibrium Pricing Model // Review of Financial Studies. 1999. Vol. 12. P. 631 — 642.

19. Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. The Econometrics of Financial Markets. Princeton (NJ): Princeton University Press, 1997.

20. Caverhill A. When is the Short Rate Markovian? // Mathematical Finance. 1994. Vol. 4. P. 305 — 312.

21. Chen R-R., Scott L. Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox, Ingersoll and Ross Model of the Term Structure // Review of Financial Studies. 1992. Vol. 5. P. 613 — 636.

22. Clewlow L., Caverhill A. On the Simulation of Contingent Claims // Journal of Derivatives. 1994. Vol. 2. P. 66 — 74.

23. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A Theory of Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 385 — 407.

24. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 363 — 384.

25. Das S. Swaps and Financial Derivatives. 2nd ed. IFR Books, 1994.

26. Dahlquist M. On Alternative Interest Rate Processes // Journal of Banking and Finance. 1996. Vol. 20. P. 1093 — 1119.

27. Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton (NJ): Princeton University Press, 1992.

28. Fabozzi F.J. Fixed Income Mathematics: Analytical and Statistical Techniques. Chicago: Probus, 1993.

29. Flesaker B. Testing the Heath — Jarrow — Morton / Ho — Lee Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1993. Vol. 28. P. 483 — 496.

30. Geman H., El Karoui N., Rochet J.C. Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing // Journal of Applied Probability. 1995. Vol. 32. P. 443 — 458.

31. Goldstein R.S. The Term Structure of Interest Rates as a Random Field // Review of Financial Studies. 2000. Vol. 13. P. 365 — 384.

32. Harrison J.M., Kreps D.M. Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets // Journal of Economic Theory. 1979. Vol. 20. P. 381 — 408.

33. Harrison J.M., Pliska S. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading // Stochastic Processes and Their Applications. 1981. Vol. 11. P. 215 — 260.

34. Haug E.G. The Complete Guide to Option Pricing Formulas. N.Y.: McGraw-Hill, 1998.

35. Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1990. Vol. 25. P. 419 — 440.

36. Heath D., Jarrow R., Morton A. Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates // Review of Futures Markets. 1991. Vol. 9. P. 54 — 76.

37. Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation // Econometrica. 1992. Vol. 60. P. 77 — 105.

38. Ho T.S.Y., Lee S.-B. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims // Journal of Finance. 1986. Vol. 41. P. 1011 — 1029.

39. Hull J.C., White A. Pricing Interest Rate Derivative Securities // Review of Financial Studies. 1990. Vol. 3. P. 573 — 592.

40. Hull J.C., White A. Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1990. Vol. 25. P. 87 — 100.

41. Hull J.C., White A. Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices // Advances in Futures and Options Research. 1993. Vol. 6. P. 1 — 13.

42. Hull J.C., White A. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models. I: Single Factor Models // Journal of Derivatives. 1994. Fall. P. 7 — 16.

43. Hull J.C., White A. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models. II: Two-Factor Models // Journal of Derivatives. 1994. Winter. P. 37 — 49.

44. Hull J.C. Options, Futures and Other Derivatives. 3rd ed. Englewood Cliffs (NJ): Prentice Hall, 1997.

45. Ingersoll J.E. Theory of Financial Decision Making. Totowa (NJ): Rowman and Littlefield, 1989.

46. Jamshidian F. Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models // Journal of Fixed Income. 1991. Vol. 1. P. 62 — 74.

47. Jarrow R.A. Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options. N.Y.: McGraw-Hill, 1996.

48. Jarrow R., Rudd A. Option Pricing. Homewood (IL): Dow Jones — Irwin, 1983.

49. Jarrow R., Turnbull S. On Delta, Gamma and Bucket Hedging of Interest Rate Derivatives // Applied Mathematical Finance. 1994. Vol. 1. P. 21 — 48.

50. Jong F. de, Santa-Clara P. The Dynamics of the Forward Interest Rate Curve: A Formulation with State Variables // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1999. Vol. 34. P. 131 — 157.

51. Longstaff F.A., Schwartz E.S. Interest Rate Volatility

and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model // Journal of Finance. 1992. Vol. 47. P. 1259 — 1282.

52. Margrabe W. The Value of an Option to Exchange One Asset for Another // Journal of Finance. 1978. Vol. 33. P. 177 — 186.

53. Merton R.C. The Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. Vol. 4. P. 141 — 183.

54. Merton R.C. Continuous-Time Finance. Cambridge (MA)/ Oxford (UK): Blackwell, 1990.

55. Miltersen K.R. An Empirical Study of the Term Structure of Interest Rates // Scandinavian Journal of Management. 1993. Vol. 9. P. 29 — 46.

56. Musiela M., Rutkowski M. Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, 1997.

57. Pelsser A. Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives. Springer, 2000.

58. Rebonato R. Interest-Rate Option Models. 2nd ed. Chichester: Wiley, 1998.

59. Rebonato R. Volatility and Correlation. Chichester: Wiley, 1999.

60. Ritchken P., Sankarasubramanian L. The Importance of Forward Rate Volatility Structures in Pricing Interest Rate Sensitive Claims // Journal of Derivatives. 1995. Vol. 3. P. 25 — 40.

61. Sandmann K., Sondermann D. A Term Structure Model and the Pricing of Interest Rate Derivatives // Review of Futures Markets. 1993. Vol. 12. P. 391 — 423.

62. Tavella D., Randall C. Pricing Financial Instruments. The Finite Difference Method. N.Y.: Wiley, 2000.

63. Tilley J. Valuing American Options in a Path Simula-

tion Model // Transactions of Society of Actuaries. 1993. Vol. 45. P. 83 — 104.

64. Turnbull S.M., Milne F. A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing // Review of Financial Studies. 1991. Vol. 4. P. 87 — 120.

65. Vasicek O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177 — 188.

66. Wilmott P., Dewynne J., Howison S. Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford: Oxford Financial Press, 1993.

67. Wilmott P., Howison S., Dewynne J. The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

68. Буренин А.Н. Рынки производных финансовых инструментов. М.: ИНФРА-М, 1996.

69. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. 2-е изд. М.: Наука — Физматлит, 1996.

70. Галиц Л. Финансовая инженерия: инструменты и методы управления финансовым риском. М.: ТВП, 1998.

71. Маршалл Дж.Ф., Бансал В.К. Финансовая инженерия. М.: ИНФРА-М, 1998.

72. Шведов А.С. О математических методах, используемых при работе с опционами // Экономический журнал Высшей школы экономики. 1998. Т. 2. N 3. С. 385 — 409.

73. Шведов А.С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг. М.: ГУ — ВШЭ, 1999.

74. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2 т. М.: Фазис, 1998.

Предметный указатель